Das U(3)-Prinzip als Basis eines mikroskopischen U(3)-Modells zur Erklärung des Phänomens nuklearer Moleküle

Entwicklung eines analytischen Konzepts
zur Beschreibung von Kern-Kern-Kollisionen
im Rahmen der Composite Particle Theorie
im Bargmann Raum

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Roland Bader
aus
Friedrichshafen

1985

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536517_0043

DAS U(3)-PRINZIP
ALS BASIS EINES MIKROSKOPISCHEN U(3)-MODELLS
ZUR ERKLÄRUNG DES PHÄNOMENS NUKLEARER MOLEKÜLE

ENTWICKLUNG EINES ANALYTISCHEN KONZEPTS
ZUR BESCHREIBUNG VON KERN-KERN-KOLLISIONEN
IM RAHMEN DER COMPOSITE PARTICLE THEORIE
IM BARGMANN RAUM

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Roland Bader
aus Friedrichshafen
1985

Tag der mündlichen Prüfung :	18. Juli 1985
Dekan :	Prof. Dr. G. Staudt
1. Berichterstatter :	Prof. Dr. P. Kramer
2. Berichterstatter :	Prof. Dr. K. Wildermuth

ABSTRACT

Tenor dieser Arbeit ist die Berücksichtigung der U(3)-Symmetrie in der Untersuchung von Kernreaktionen. Durch die Beschreibung der beiden kollidierenden Fragmente und deren Relativbewegung mittels U(3)-Quantenzahlen werden U(3)-Kanäle und U(3)-Kanal-Sets definiert. Es wird gezeigt, daß in bestimmten Kollisionen die U(3)-Symmetrie von U(3)-Kanälen inkompatibel mit der U(3)-Symmetrie des Compoundkerns ist. Für diese U(3)-Kanäle ist die Bildung des Compoundkerns verboten. In diesem Rahmen wird ein mikroskopisches U(3)-Modell zum Phänomen der nuklearen Molekülresonanzen entwickelt. U(3)-Barrieren, die in diesem Modell eine wichtige Rolle spielen, sind für die Repulsion zwischen den beiden Fragmenten verantwortlich. Mit mikroskopischen Rechnungen wird belegt, daß durch die oberhalb der U(3)-Barrieren erlaubten U(3)-Kanäle eine Attraktion zwischen den beiden Fragmenten zustande kommt. Dieses Wechselspiel von Anziehung und Abstoßung führt zur Bildung von nuklearen Molekülen. Ferner wird gezeigt, daß sich diese Inkompatibilität und somit das Phänomen nuklearer Molekülresonanzen auf ein U(3)-Prinzip, in dem das Pauli Prinzip enthalten ist, zurückführen lassen. Basierend auf diesem U(3)-Prinzip werden Auswahlregeln formuliert, die Kandidaten für nukleare Molekülresonanzen vorhersagen. Dies erklärt, warum nur manche Binärsysteme zur Molekülbildung neigen.

Ein Vergleich der Normeigenwerte der Systeme $^{16}O + ^{12+b}X$, $0 \leq b \leq 4$, für die der Resonanzmechanismus vorhergesagt wird, mit den Eigenwerten der Systeme $\alpha+\alpha$ und $\alpha+^{16}O$ enthüllt charakteristische Unterschiede. Für die nicht trivialen Systeme $^{16}O + ^{12+b}X$ wird zuvor ein aufwendiges Racah algebraisches Problem gelöst. Analytische Lösungen für die erforderlichen 3-(λ,μ)- und 9-(λ,μ)-Symbole werden angegeben. Eine U(3)-Kopplungsmodquantenzahl wird eingeführt, die in diesen Kollisionen wichtige physikalische Bedeutungen besitzt.

Zur weiteren Klärung des Resonanzmechanismus werden Ergebnisse quasigebundener Rechnungen für die Systeme $\alpha+\alpha$ und $^{16}O - ^{16}O$ diskutiert. Zur Durchführung der mikroskopischen Rechnungen wird die Composite Particle Theorie im Bargmann Raum erweitert. Für die Berechnung der Wechselwirkungsintegralkerne für Kern-Kern-Kollisionen wird eine analytische Methode entwickelt, die den bisherigen weit überlegen ist.

INHALTSVERZEICHNIS

ZUM INHALT DER ARBEIT 1

KAPITEL 1

1. EINLEITUNG 3

1.1 Zielsetzung und Motivation 3

1.2 Nukleare Molekülresonanzen 10

Das Experiment von Bromley, Kuehner und Almqvist 10

Das Modell von Vogt und McManus 11

Das Modell von Davis 12

Two-centre shell model 13

Double-excitation model 14

Band-crossing model 14

Vibron model 15

Zusammenfassendes Bild 16

Motivation der Suche nach einem mikroskopischen Mechanismus 18

KAPITEL 2

2. U(3)-SYMMETRIE 19

2.1 Klassifizierung eines A_i-Teilchenzustandes 19

2.2 Die U(3)-Symmetrie der Relativbewegung 20

2.3 Die U(3)-Symmetrie in der Kollision zweier Fragmente 22

KAPITEL 3

3. DISKUSSION DER ERGEBNISSE DER MIKROSKOPISCHEN RECHNUNGEN 33

3.1 Die Eigenwerte der Normoperatoren der Systeme $^{16}O + ^{12+b}X$, $0 \leq b \leq 4$; $\alpha + \alpha$ und $\alpha + ^{16}O$ 34

3.2 Ein Vergleich der Ergebnisse quasigebundener Rechnungen für die Systeme $\alpha + \alpha$ und $^{16}O + ^{16}O$ 45

KAPITEL 4

4. DIE THEORIE DES WECHSELWIRKUNGSINTEGRALKERNS 70

4.1 Rekapitulation der Kramer'schen Theorie 70

Die Matrixelemente eines 2-Teilchen-Operators im Supermultiplettschema 70

Die Wechselwirkungsintegralkerne 74

Kritik 78

4.2 Entwicklung eines neuen Konzepts 80

Teil A : Ableitung der Grundformel 80

Vereinfachung des Invertierungsproblems der Überlappmatrix in der modifizierten Basis 80

Elimination der Symmetrie 82

Elimination der sphärischen Koordinaten 86

Grundformel des neuen Konzepts 88

Teil B :
Kerne im Bargmann Raum 93

Gauß Wechselwirkung 93
Relativkinetische Energieoperator 95
Coulomb Wechselwirkung 97

Teil C :
Allgemeine Zusammenhänge 100
– Vereinfachungen –

4.3 Anwendungen

Die Kerne $(x_i|K_{n_i\tilde{n}_j}|\tilde{x}_j)$ 107

Integralkern für Gauß´sche Wechselwirkungen (mit Ortsaustausch) 110
Integralkern für den relativkinetischen Energieoperator 114
Integralkern für die Coulomb Wechselwirkung 117
Spezielle Eigenschaften von Systemen identischer Fragmente 123
Transformation auf Relativ-und Schwerpunktkoordinaten 126

KAPITEL 5

5. DIE THEORIE DES NORMKERNS 131

5.1 U(3) Racah Algebra 132

Konvention 132
Konjugation 133
Das 3-(λ,μ)-Symbol 134
Das 1-(λ,μ)-Symbol 134
Das gemischte 3-(λ,μ)/1-(λ,μ)-Symbol 135
Das 9-(λ,μ)-Symbol 136
Der U(3) Wigner Koeffizient 136
Der reduzierte Wigner Koeffizient 137

5.2 U(3) Racah Algebra des Normkerns 140

Der 1. Weg 140

Der 2. Weg 140

Das algebraische Problem 142

5.3 Die Elemente des Normoperators in der Gelfand Basis 152

ZUSAMMENFASSUNG 157

ANHANG 161

A. BEWEIS DER GLEICHUNG 4.(9.c) 161

B. ABLEITUNG DER GLEICHUNG 4.(107) 163

REFERENZEN 165

ZUM INHALT DER ARBEIT

In dieser Arbeit werden zwei Schwerpunkte gesetzt. Der erste liegt in der Weiterentwicklung der Composite Particle Theorie im Bargmann Raum und der zweite in der Entwicklung eines mikroskopischen Modells zum Phänomen der nuklearen Molekülresonanzen auf der Basis des U(3)-Prinzips. Im Rahmen dieses mikroskopischen Modells werden mit der weiterentwickelten Composite Particle Theorie mikroskopische Rechnungen durchgeführt.
Gemäß dieser Gewichtung hielt ich es für zweckmäßig, die Abhandlung in einen theoretischen und in einen sehr anschaulichen Teil zu gliedern, dergestalt daß die Diskussion der Ergebnisse der mikroskopischen Rechnungen, die Ausführungen zum U(3)-Prinzip und die Darstellung des mikroskopischen Modells in einem allgemeinverständlichen Diskurs zusammengefaßt sind, während die Theorie in der zweiten Hälfte dieser Schrift dargelegt wird.
Der auch für Nichttheoretiker verständliche Part umfaßt die Kapitel 1 bis 3. Sehr theoretisch wird es in den Kapiteln 4 und 5. Diese beiden letzten Kapitel sind aber meiner Meinung nach so abgefaßt, daß sie für Theoretiker nachvollziehbar sein sollten und für jene, die auf diesem Gebiet weiterarbeiten wollen, als Leitfaden und Anleitung dienlich sind. Darüber hinaus ist Kapitel 4 auch eine Fundgrube für Physiker, die sich nicht mit der Composite Particle Theorie im Bargmann Raum befassen, sondern sich auf dem Feld der RGM, GCM oder OCM betätigen.

Im Kapitel 1, der Einleitung, werden die Ziele und die Motivation dieser Arbeit geschildert und anschließend wird ein Abriß der Physik der nuklearen Molekülresonanzen gegeben.
Das Kapitel 2 beschäftigt sich mit der Frage, wie die U(3)-Symmetrie zur Beschreibung von Kernreaktionen verwendet werden kann. In diesem U(3)-Bild wird ein mikroskopisches Modell für das Phänomen nuklearer Molekülresonanzen vorgestellt. Das U(3)-Prinzip und Auswahlregeln werden formuliert.

Anschließend werden für die Systeme $^{16}O + ^{12+b}X$, $0 \leq b \leq 4$, $\alpha + \alpha$ und $\alpha + ^{16}O$ im Kapitel 3 die Ergebnisse der mikroskopischen Rechnungen diskutiert, die das mikroskopische Modell voll bestätigen.

Bei der Durchführung der mikroskopischen Rechnungen gibt es zwei Hauptprobleme, mit denen ich mich in den Kapiteln 4 und 5 auseinandersetze .
Im Kapitel 4 wird eine sehr effektive Theorie des Wechselwirkungsintegralkerns im Bargmann Raum entwickelt. An Hand von Anwendungsbeispielen wird gezeigt, daß diese Methode den bisherig bekannten weit überlegen ist. Mit dieser Methode lassen sich die Integralkerne auch für schwerere Systeme analytisch berechnen.
Zum Schluß wird im Kapitel 5 das Problem der U(3) Racah Algebra des Normkerns analytisch gelöst.

KAPITEL 1

1. EINLEITUNG

1.1 Zielsetzung und Motivation

In der vorliegenden Arbeit wird die Gruppe U(3) (bzw. SU(3)) zur Beschreibung von Kern-Kern-Kollisionen herangezogen. Es ist aber nicht die Absicht, Altbekanntes nur in neuer gruppentheoretischer Verpackung zu präsentieren. Vielmehr soll versucht werden, die mit dieser Gruppe verbundene Physik und die grundsätzlich neuen Aspekte herauszuarbeiten.

Dazu ist es zweckmäßig, auf das Jahr 1958 zu verweisen, in dem Elliott in zwei Arbeiten [1]) das SU(3)-Modell zur Beschreibung kollektiver Bewegung im Schalenmodell vorstellte. Im Rahmen dieses Modells konnte u.a. das Auftreten von Rotationsbanden in den Spektren leichterer Kerne erklärt werden. In der Folgezeit fand dieses Modell häufige Anwendung bei Berechnungen und Untersuchungen von Kernen mit p-Schalenstruktur [2-6]) und ebenso von Kernen mit sd-Schalenstruktur [7-11]). Diese Arbeiten, insbesondere die sehr allgemeinen und ausführlichen Abhandlungen von M. Harvey (The Nuclear SU(3) Model) [10]), K.T. Hecht (Symmetries in Nuclei) [12]) und J.C. Parikh (Group Symmetries in Nuclear Structure) [13]) belegen die Güte der SU(3)-Symmetrie in Kernen mit sp-Schalenstruktur und Kernen mit entweder kaum oder fast gefüllter sd-Schale. Auch wenn starke Symmetriebrechungen im mittleren Bereich der sd-Schale und vor allem in schweren Kernen die Anwendbarkeit des Modells einschränken, verbleibt dennoch eine Vielzahl von Kernen, die eine stark ausgeprägte SU(3)-Symmetrie tragen. Das hat zur Folge, daß die irreduziblen Darstellungen von SU(3) als gute Quantenzahlen aufgefaßt werden können. Nun läßt sich ein Zustand eines Kerns durch eine Mischung von SU(3)-Darstellungen charakterisieren. Ist die Symmetrie gut, so liegt die Dominanz einer einzelnen SU(3)-Darstellung vor. Genau dieser

Sachverhalt spiegelt sich z.B. in den niederenergetischen Zuständen und insbesondere in den Grundzuständen von Kernen mit sp-Schalenkonfiguration wider.
Bei einer Kollision zweier Fragmente mit wohldefinierten SU(3) Quantenzahlen im Eingangskanal, für die genauso Erhaltungssätze gelten müssen wie im Falle des Drehimpulses oder der Energie, muß zwangsläufig der gesamte dynamische Prozeß von der SU(3)-Symmetrie geprägt werden. Da die Gruppe SO(3 $\mathbb{R}$), die mit dem Drehimpuls in Zusammenhang steht, eine Untergruppe von SU(3) ist, wird ersichtlich, warum SU(3)-Quantenzahlen eine allgemeinere Beschreibung eines dynamischen Prozesses erlauben, als dies im Drehimpulsschema möglich ist. Das Entscheidende ist, daß die interne Struktur der Fragmente mit einbezogen wird. Man nehme z.B. an, daß eines der beiden Fragmente ^{12}C sei. Im Drehimpulsbild wird mit dem Drehimpuls $L = 0$ der Grundzustand beschrieben. Eine SU(3)-Beschreibung geht von der irreduziblen Darstellung $(\lambda, \mu) = (0, 4)$ aus, die die Rotationsbande $L = 0, 2, 4$ von ^{12}C umfaßt. In einer Beschreibung des Kollisionsprozesses zweier Fragmente mit SU(3)-Quantenzahlen wird also nicht nur der Drehimpuls des Grundzustandes, sondern auch dessen Zugehörigkeit zu einer Rotationsbande und somit seine kollektive Eigenschaft mit berücksichtigt. Hoffnungen, auf neue Erkenntnisse zu stoßen, sind also durchaus berechtigt.

Da diese gruppentheoretische Untersuchung bereits in meiner Diplomarbeit [14]) durchgeführt wurde, stand hier als ein Aspekt die Einbettung der Analyse in ein physikalisches Gesamtbild im Vordergrund. In diesem Zusammenhang wird ein U(3)-Prinzip, in dem das Pauli Prinzip eingeschlossen ist, formuliert. Dieses U(3)-Prinzip spielt eine wichtige Rolle in Kernreaktionen und kann nukleare Molekülresonanzen verursachen. Ein Phänomen, für das es bislang keine allgemeine, mikroskopische Erklärung gab.

Daran, das Ziel nun klarer vor Augen, knüpfte sich das weitere Vorhaben. Mittels mikroskopischen Rechnungen für 2-Clustersysteme, die aufgrund der vorangegangenen U(3)-Analyse als Kandidaten für nukleare Molekülresonanzen in Frage kommen, könnten im U(3)-Bild detailierte Untersuchungen neue Informationen liefern. Diese Rechnungen sollten auf den Grundlagen der Com-

posite Particle Theory im Bargmann Raum — im folgenden abgekürzt als CPTB —, die in der Monographie [15], Group Theory and the Interaction of Composite Nucleon Systems, von Kramer, John und Schenzle erarbeitet wurden, durchgeführt werden. In dieser Theorie, in der die harmonischen Oszillatorfunktionen eine sehr einfache Gestalt haben und darüber hinaus die auftretenden Kerne analytisch sind, wurden bereits erfolgreich Systeme mit der Massenzahl $4 \leq A \leq 10$, die aus drei s-Clustern bestehen, berechnet [15, 16]. Im 2-Clustersystem konnten — jedoch nur hinsichtlich des Eigenwertproblems des Normoperators, der das Pauli Prinzip beinhaltet — auch nicht triviale Schalenstrukturen mit einbezogen werden, so daß inzwischen Normanalysen für Binärsysteme mit den Schalenkonfigurationen

a) geschlossene Schale + s^b, $1 \leq b \leq 4$,

b) s^4 + $s^4 p^b$, $0 \leq b \leq 4$,

c) $s^4 p^{12}$ + $s^4 p^{12}$

vorliegen [15]

Die vorangegangene U(3)-Analyse zeigte, daß die Kandidaten für nukleare Molekülresonanzen bereits so schwer sind, daß auch mit anderen bereits in der Theorie bekannten Methoden das Eigenwertproblem des Normoperators, selbst für die vergleichsweise "einfachen" Systeme $^{16}O + {}^{12+b}X$, $0 \leq b \leq 4$, nicht gelöst werden konnte. Es galt also zunächst, die Theorie des Normkerns auszubauen. Das theoretische Konzept wurde in der Diplomarbeit dargelegt. Dort wurde ausgenutzt, daß das Eigenwertproblem des Normoperators in der U(3)-Basis gelöst werden kann, wodurch allerdings die volle U(3) Racah Algebra in Kauf genommen werden muß. Eine weitere Aufgabe bestand also darin, für die Systeme $^{16}O + {}^{12+b}X$, $0 \leq b \leq 4$ die Racah Algebra zu diskutieren, um dann letzten Endes auf numerischem Wege das Eigenwertproblem des Normoperators zu lösen.

Danach konnten dann die Wechselwirkungsintegralkerne für zusammengesetzte Teilchen in Angriff genommen werden. In der Monographie [15] findet sich ein theoretisches Konzept, um für Binärsysteme mit abgeschlossenen Oszillatorschalen die Integralkerne der Wechselwirkung zu untersuchen. Bei der Anwendung dieses Konzepts stellte sich heraus, daß die direkte Umsetzung der in der Monographie angegebenen Ausdrücke in Rechenprogramme auf

grundsätzliche Schwierigkeiten stieß und eine Berechnung auf diesem Wege nicht möglich war.

Es gab nun zwei Möglichkeiten, entweder

a) auf andere, verwandte Methoden, mit denen bereits erfolgreich schwerere Binärsysteme mit geschlossenen Schalen berechnet wurden, auszuweichen und diesen die U(3)-Symmetrie aufzupfropfen oder

b) im bisherigen Rahmen ein neues Konzept zu entwerfen, in dem die algebraischen Ausdrücke für die Wechselwirkungsintegralkerne grundlegend umgeformt werden.

ad a)

Tabelle 1.1

Auflistung der Binärsysteme mit geschlossenen Schalen, die mit den Methoden

RGM : Resonating Group Method [65-68]

GCM : Generator Coordinate Method [27, 29, 31, 34, 43, 44, 69-75]

RGM-GCM

OCM : Orthogonal Condition Model [62]

untersucht wurden.

	$\alpha + \alpha$	$\alpha + {}^{16}O$	$\alpha + {}^{40}Ca$	${}^{16}O + {}^{16}O$	${}^{16}O + {}^{40}Ca$	${}^{40}Ca + {}^{40}Ca$
RGM	[17-25]	[26]				
GCM	[27-39]	[36, 37, 40, 41]	[42]	[37, 38, 42-48]	[42, 49]	[50]
RGM-GCM	[39, 51]	[51-55]	[56, 57]	[51, 58-60]	[61]	
OCM	[51, 62]	[51, 63]	[64]	[51, 64]		

In der Tabelle 1.1 sind die mir bekannten Arbeiten nach den 4 ausgewählten Methoden und den damit untersuchten Systemen aufgeschlüsselt.

Das Gemeinsame dieser Methoden besteht u.a. darin, ein A-Nukleonensystem auf ein 2-Clusterproblem zu projizieren.

Ursprünglich konnten mit der RGM nur leichte Systeme berechnet werden, da mit zunehmender Massenzahl die Integralkerne beliebig kompliziert wurden.

Über die GCM wurden aufgrund der weitaus einfacheren Integralkerne auch schwerere Systeme zugänglich. Nachteilig wirkt sich aus, daß in dieser Methode an die Stelle der Relativfunktionen als Lösungen der Resonating Group Gleichung die Gewichtsfunktionen als Lösungen der Griffin-Hill-Wheeler (GHW) Gleichung treten. Diese für die GCM charakteristischen Gewichtsfunktionen sind physikalisch schwer zu interpretieren.

Wegen der daraus resultierenden (anfänglichen) Schwierigkeit, über die GCM die Randbedingungen der Streu-und Reaktionstheorie zu formulieren, die in der RGM sehr einfach zu formulieren sind, hat sich aus beiden Methoden eine facettenreiche RGM-GCM entwickelt. In der gedanklich — aber nicht in ihrer Ausführbarkeit — einfachsten Version wird ausgenutzt, daß aus den Integralkernen der GCM über eine Integraltransformation die Integralkerne der RGM (numerisch) berechnet werden können, während in anderen Versionen GC-Techniken in die RGM eingeführt werden.

Mittlerweile können diese Wege vermieden werden, da von H. Horiuchi, D. Baye und P.-H. Heenen [27,34], T. Yukawa [31,43,44], N. B. Takacsy [29], F. Tabakin [74] und B. Giraud et al. [75] fünf verschiedene Vorschläge unterbreitet wurden, wie auch mit der GCM Streu-bzw. Reaktionsrechnungen durchgeführt werden können.

Auf eine völlig andere Weise wird in dem von S. Saito vorgeschlagenen OCM [62] das Problem der komplizierten Integralkerne angepackt. In dieser zur RGM approximativen Methode, werden die nicht lokalen Integralkerne, die das eigentliche Problem darstellen, durch lokale ersetzt. Unbestraft bleibt dieser Eingriff nicht. Das Pauli Prinzip wird verletzt ! Deshalb wird es über die Nebenbedingung, daß die Lösungen orthogonal zu den Pauli verbotenen Zuständen sein müssen, durch die Hintertür wieder eingeführt .

ad b)

Hinsichtlich der geschilderten Methoden stellt sich die Frage, ob es sinnvoll ist, im Rahmen der CPTB weiterzuarbeiten. Die Antwort ist ja. Zum einen sei erwähnt, daß eine Äquivalenz zu der CGCM [76], einer in die komplexe

Ebene fortgesetzten GCM, vorliegt. An die Stelle der reellen Generatorkoordinaten treten komplexe. Durch diesen Trick können in vielen Fällen Irregularitäten der Gewichtsfunktion der GCM behoben werden (siehe z.B. Ref. [77]). Hinsichtlich weiterer mathematischer Vorteile sei auf Ref. [76]) verwiesen. Diese Vorteile sind deshalb auch in der CPTB wiederzufinden. Ferner stehen die Wechselwirkungsintegralkerne über eine unitäre Integraltransformation mit den Wechselwirkungsintegralkernen der RGM in Beziehung. Doch was die CPTB ganz besonders auszeichnet, ist ihre gruppentheoretische Formulierung. Durch das Supermultiplettschema kann das Pauli Prinzip und somit die Antisymmetrisierung völlig unproblematisch in die Theorie eingebaut werden. Die Dekomposition in Orbit- und Spin- Isospin-Raum, die fractional parentage Methode, Überlapp von A-Teilchenzuständen u.s.w. lassen sich gruppentheoretisch in den Griff bekommen.

Innerhalb dieses Rahmens sind die besten Bedingungen vorgegeben, um analytisch die Integralkerne zu berechnen. Das erwähnte Problem, das dabei auftaucht, scheint mehr in der Konzeption zu liegen, mit der man sich innerhalb dieses Rahmens bewegt.

Für die mikroskopische Wechselwirkung wird gewöhnlich eine 2-Teilchen-Wechselwirkung angenommen. Die algebraische Reduktion der Integralkerne der Wechselwirkung der zusammengesetzten Teilchen läßt sich dann mit 2-Teilchen-Matrixelementen formulieren. Es wird sich aber herausstellen, daß diese algebraische Formulierung von Grund auf umgeformt werden muß in eine Art Dichtematrixformalismus, der dann sehr effektiv die analytische Berechnung der Wechselwirkungsintegralkerne aus den mikroskopischen Wechselwirkungen der Nukleonen erlaubt. Die Effektivität des Konzepts wird anhand von Anwendungsbeispielen bewiesen. Ausgehend von einer allgemeinen Formel für die Konfigurationen $f = [4^j]$ ($j = 2 \hat{=} \alpha+\alpha$, $j = 5 \hat{=} \alpha + {}^{16}O$, $j = 8 \hat{=} {}^{16}O + {}^{16}O$) wird ein geschlossener, analytischer Ausdruck im Falle der Volkov Kräfte, der Brink-Boeker Kräfte, der Coulomb Wechselwirkung und des kinetischen Energieoperators abgeleitet. Der Anwendungsbereich kann im Falle geschlossener Schalen auch auf schwerere Binärsysteme ausgedehnt werden. Das verblüffende an dieser Methode ist, daß, sobald man sich für ein Binärsystem entschieden hat, z.B. für ${}^{40}Ca + {}^{40}Ca$, in dem analytischen Ausdruck des Integralkerns auch die Ergebnisse sämtlicher leichterer Binärsysteme

enthalten sind, die aus α, ^{16}O, ^{40}Ca gebildet werden können. Zweifelsohne ist diese Methode der herkömmlichen GCM überlegen und stellt eine überzeugende Basis dar, um auch Kollisionen von Fragmenten mit offenen Schalen in Angriff zu nehmen, also insbesondere jene Systeme, die laut den durchgeführten U(3)-Analysen als Kandidaten für nukleare Molekülresonanzen in engere Wahl kommen. Doch das ist mehr eine zukünftige Perspektive, die sich sehr vielversprechend im Laufe dieser Arbeit abgezeichnet hat.
Das naheliegende Ziel, das sich bei diesem Stand der Dinge bot, war die mikroskopische Berechnung des Systems $^{16}O + ^{16}O$, das ebenfalls das Phänomen nuklearer Molekülresonanzen zeigt, unter expliziter Berücksichtigung des U(3)-Prinzips. Da nach der vorgeschlagenen Methode auch die binären Untersysteme zugänglich sind, wäre es interessant, unter diesen speziellen Gesichtspunkten einen Vergleich mit einer mikroskopischen $\alpha + \alpha$ Rechnung anzustellen; denn in diesem System werden in der Grundzustandsbande keine molekularen Resonanzen beobachtet.

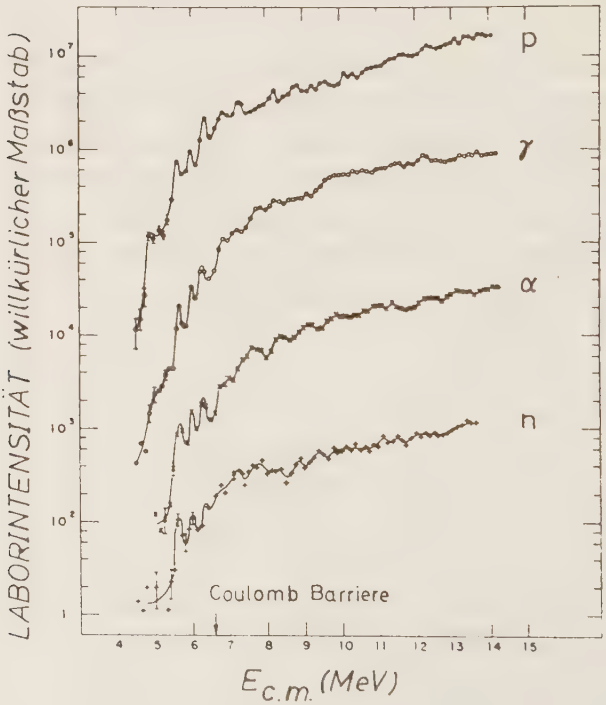
Ein wesentliches Anliegen dieser Arbeit war auch stets, die zukünftige Thematik vor Augen zu haben und somit nicht nur zu zeigen, daß die Theorie leistungsfähig ist und mit den bisherigen Methoden konkurieren kann, sondern sie darüber hinaus so zu formulieren, daß die beste Ausgangsposition geschaffen ist, um auch schwerere Systeme mit offenen Schalen mikroskopisch zu berechnen. Deshalb ruht in dieser Theorie sehr viel Latentes, das sich zum Vorteil bei der Anwendung auf kompliziertere Systeme wecken läßt.

1.2 Nukleare Molekülresonanzen

Der Begriff nukleare Molekülresonanzen ist schon mehrfach gefallen und bildet den physikalischen Hintergrund dieser Arbeit. Daher schließt sich hier eine kurze Einführung in Form eines historischen Abrisses und einer Skizzierung der gängigsten Modelle an.

Das Experiment von Bromley, Kuehner und Almqvist

Als 1960 Bromley, Kuehner und Almqvist [78,79]) die Kollision $^{12}C + ^{12}C$ im Energiebereich 3 MeV $\leq E_{c.m.} \leq$ 14.5 MeV untersuchten, stießen sie im Bereich der Coulomb Barriere (E_C = 6.6 MeV) auf ein merkwürdiges Resonanzverhalten. Die Anregungsfunktionen für die Reaktionsprodukte [79]) p, γ, α, n wiesen bei 5.68 MeV, 6.0 MeV, 6.32 MeV drei scharfe, korrelierte Resonanzen auf.



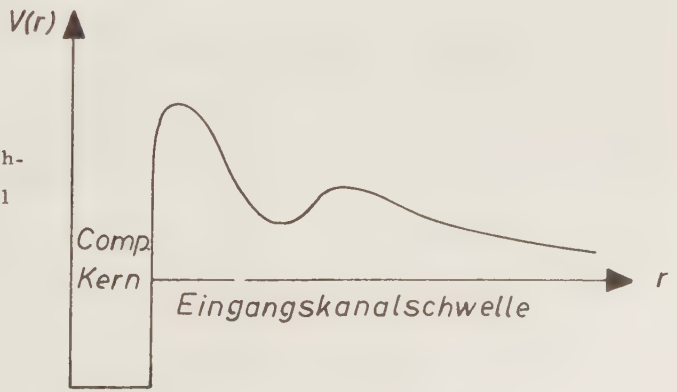
Figur 1.1
Anregungsfunktionen für verschiedene Reaktionsprodukte (p, γ, α, n) in der Reaktion $^{12}C + ^{12}C$

Das merkwürdige an diesen Resonanzen war ihre Breite von ungefähr 100 keV. Somit konnten dies keine Resonanzen des Compoundkerns ^{24}Mg sein; denn in diesem Energiebereich sollte der energetische Abstand der Niveaus des Compoundkerns weniger als 30 keV betragen und im Falle eines α-Zerfalls dürfte man allenfalls eine Breite von ein paar keV erwarten. Breiten und Abstand der beobachteten Resonanzen waren also um einen Faktor 10 zu groß, um über das Compoundkernsystem erklärt werden zu können.

Noch im selben Jahr wurden von Vogt und McManus sowie von Davis die ersten Versuche gemacht, den Resonanzmechanismus zu verstehen.

Das Modell von Vogt und McManus

Vogt und McManus schlugen ein adiabatisches Modell vor [80]) in dem die Deformation der beiden Kollisionspartner eine entscheidende Rolle spielt. Bei zunehmender Annäherung werden die beiden Kerne mehr und mehr längs ihres Relativvektors deformiert. Dadurch kommen bei einem gegebenen Relativabstand die Kerne in einen engeren Kontakt, als dies bei nicht deformierten Kernen der Fall wäre. Die so gewonnene Kontaktenergie soll dabei stets die erforderliche Deformationsenergie kompensieren. Die Rechnung führt auf einen sehr breiten Potentialtopf mit einem flachen Minimum bei $E_{c.m.} \approx 4$ MeV und $r \approx 7$ fm. Durch die zunehmende Repulsion der Coulomb Kraft und der Zentrifugalkraft bei kleiner werdendem Abstand ist diese Potentialmulde vom Potentialtopf des Compoundkerns durch eine Barriere getrennt. Dies ist schematisch in der Figur 1.2 dargestellt.

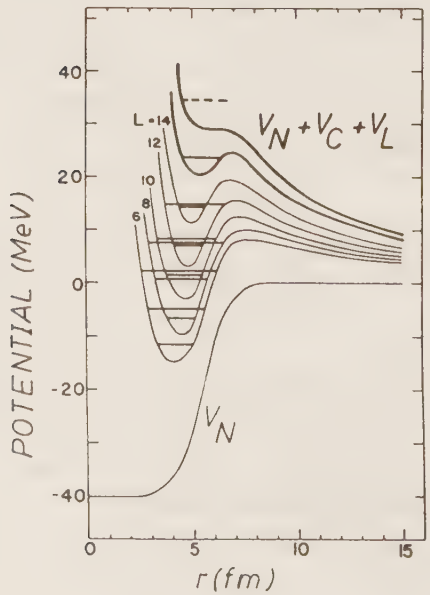


Figur 1.2
Schematisches Wechselwirkungspotential zweier Fragmente, die ein Quasimolekül bilden.

Wird die vorgelagerte Potentialmulde durch einen unendlich hohen Potentialtopf approximiert, so können in der Tat durch drei Bindungszustände die Lage und der Abstand der beobachteten Resonanzen reproduziert werden. Zusammenfassend ergibt sich also das folgende Bild des Kollisionsvorganges: bevor die beiden Kollisionspartner fusionieren bzw. zurückgestreut werden, bilden sie — bedingt durch die vorgelagerte Potentialmulde — ein Quasimolekül. Die beobachteten Resonanzen sind die quasigebundenen Zustände dieses Moleküls. Die Lebensdauer eines solchen Quasimoleküls sollte kürzer sein als die eines Compoundkernes im selben Energiebereich, wodurch sich die relativ große Breite der beobachteten Resonanzen erklärt.

Das Modell von Davis

Davis entwickelte ein Modell [81], in dem die Drehimpulsabhängigkeit explizit berücksichtigt wurde. Das Wechselwirkungspotential der beiden Fragmente als eine Überlagerung des realen optischen Potentials (V_N), des Coulomb Potentials (V_C) und des Zentrifugalpotentials (V_L) (siehe Figur 1.3) zeigt eine vorgelagerte Potentialmulde. Die Tiefe der Mulde und die Anzahl der ausgebildeten, quasigebundenen (durchgezogene Linien) und virtuellen (gestrichelte Linien) Zustände hängen vom Bahndrehimpuls L ab.



Figur 1.3
Wechselwirkungspotential zwischen zwei Fragmenten in Abhängigkeit vom Abstand r und Drehimpuls L. Die Größenordnungen sind typisch für Systeme wie $^{12}C + ^{12}C$ oder $^{16}O + ^{16}O$.

V_N : reales optisches Potential ;
V_C : Coulomb Potential ;
V_L : Zentrifugalpotential ;

In der Folgezeit setzte ein fieberhaftes Suchen nach diesem Resonanzphänomen in anderen Systemen ein. Zu den am besten untersuchten Systemen zählen inzwischen $^{12}C + ^{12}C$, $^{12}C + ^{16}O$ und $^{16}O + ^{16}O$. Hinsichtlich einer Zusammenfassung der experimentellen Arbeiten (bis 1981) sei auf den Review Artikel von Cindro [82]) verwiesen.

In gleicher Weise aktiv zeigten sich die theoretischen Physiker. Mit zunehmenden Datenmaterial zeigten sich nämlich bald die Unzulänglichkeiten der beiden einfachen Modelle, die in ihrer Grundidee, der Bildung eines Quasimoleküls, richtig waren, aber in quantitativer Hinsicht versagten. Verbesserte phänomenologische Modelle mußten entwickelt werden.

Two-centre shell model

In dem two-centre shell model von Greiner et al. [83,84]) lassen sich charakteristische Züge der beiden skizzierten Modelle wiederfinden. Es arbeitet jedoch mit einem erheblich verbesserten Wechselwirkungspotential. Die beiden in den Zentren $\pm z_0$ lokalisierten Fragmente werden durch ein deformiertes Oszillatorpotential repräsentiert und ein zusätzlicher Potentialausdruck gibt eine detailierte Wiedergabe der Wechselwirkung zwischen den beiden Kollisionspartnern. Für die Beschreibung der "Durchdringung" der beiden Kerne werden zwei verschiedene Approximationen verwendet. Der sudden approximation liegt die Vorstellung zugrunde, daß durch die Überlagerung der Kerndichten eine Kompression der Kernmaterie auftritt. Läuft der Kollisionsprozeß so langsam ab, daß die Energie des Systems hinsichtlich der Parameter der Kernmaterie minimal ist, also eine starke Deformation auftreten kann, ist die adiabatic approximation gerechtfertigt. Beide Näherungen liefern bis zum Berührungsabstand der beiden Fragmente und für größere Bahndrehimpulse bis zu noch kleineren Abständen einen ähnlichen Verlauf der Kern-Kern-Wechselwirkung mit der typischen, vorgelagerten Potentialmulde.

Double-excitation model

Das double-excitation model wurde sowohl von Imanishi [85,86]) als auch unabhängig davon von Scheid, Greiner, Lemmer und Fink [87,88]) eingeführt. In diesem Modell, das an Hand der Figur 1.3 anschaulich erläutert werden kann, wird eine intrinsische Anregung der Fragmente mitberücksichtigt. Eine solche Anregung eines Fragments kann dann stattfinden, wenn eine einlaufende Partialwelle mit einem virtuellen Zustand resoniert und ein Übergang zu einem quasigebundenen Zustand erfolgt. Mit der freigesetzten Energie wird das Fragment angeregt. Voraussetzung ist, daß Energie- und Drehimpulserhaltung bei diesem Vorgang nicht verletzt werden und eine starke Kopplung zwischen der elastischen und der inelastischen Molekülbande vorliegt. Dieser Doppelresonanzmechanismus verrät sich durch intermediäre Strukturen, die den breiten nuklearen Molekülresonanzen überlagert sein können.

Band-crossing model

Dieser zuletzt angeschnittene Aspekt, die starke Kopplung zwischen der elastischen und einer inelastischen Molekülbande, ist die Grundlage für das band-crossing model (BCM), das von Abe et al. [89-93]) zur Erklärung herangezogen wurde. Zum Beispiel existieren in $^{12}C + ^{12}C$ neben der elastischen Molekülbande noch drei inelastische Bande (L-2, L, L+2), wenn der angeregte Zustand 4.43 MeV, 2^+ eines der beiden Kerne miteinbezogen wird. Von diesen drei inelastischen Banden schneidet nur die Bande L+2 (aligned band) die elastische. Werden weitere intrinsische Zustände und somit zusätzliche inelastische Bande mitberücksichtigt, können weitere Schnittpunkte mit der elastischen Bande auftreten. In den Schnittpunktbereichen induziert die starke Kopplung Übergänge von der elastischen in die jeweils schneidende, inelastische Bande und beobachtete Resonanzen lassen sich so erklären. Nicht erklären läßt sich, warum in manchen Kreuzungsbereichen keine Resonanzen auftreten (siehe z.B. $^{14}N + ^{14}N$) und bei niedrigen Drehimpulsen, obwohl keine Kreuzungsbereiche vorliegen, Resonanzen beobachtet werden.

Vibron model

Zuletzt möchte ich auf das einzige gruppentheoretische Modell, das sogenannte vibron model [94]) zu sprechen kommen. Wenn in der Tat die beiden kollidierenden Kerne ein Molekül bilden, so überlegte sich Iachello, dann sollte eine Struktur vorliegen, die große Ähnlichkeit mit der in diatomaren Molekülen beobachteten besitzt. Da aus der Atomphysik bekannt ist, daß die Molekülspektren in erster Linie durch Dipolfreiheitsgrade geprägt werden, ist naheliegend anzunehmen, daß die nuklearen Molekülresonanzen nichts mit den tiefliegenden Kollektivzuständen gemein haben können, die hauptsächlich Quadrupolfreiheitsgrade besitzen. Die Beschreibung der drei Dipolfreiheitsgrade durch drei Vektorbosonen π_μ $(J^\pi = 1^-)$ und die Berücksichtigung des Monopolfreiheitsgrades durch ein Skalarboson σ $(J^\pi = 0^+)$ führt auf die Gruppe U(4) als allgemeinste Gruppenstruktur des Hamilton Operators. In der Literatur sind die beiden dynamischen Symmetrien [94-97]), beschrieben durch

$$U(4) > O(4) > O(3) > O(2) \quad , \qquad \text{I}$$

$$U(4) > U(3) > O(3) > O(2) \qquad \text{II}$$

in der Diskussion. Je nach gewählter Klassifizierung (I oder II) läßt sich eine Energieformel finden in Abhängigkeit der Quantenzahlen, die in der Untergruppenkette auftreten. Zusätzlich sind willkürliche Parameter enthalten, die so bestimmt werden müssen, daß das experimentelle Spektrum optimal reproduziert wird. Den Resonanzen können dann gemäß der gewählten Untergruppenkette (I oder II) Quantenzahlen zugeordnet werden. Das Problem ist, daß im Rahmen einer dynamischen Symmetrie mit anderen Parametersätzen gleich gute Ergebnisse erzielt werden können. Den Resonanzen werden dadurch aber andere Quantenzahlen zugeordnet. Außerdem ist es nicht immer möglich, zu entscheiden, welche dynamische Symmetrie in einem System realisiert ist [96]). Diese Vieldeutigkeiten können nur dann beseitigt werden, wenn für ein System ein reicher experimenteller Befund vorliegt, d.h., wenn die Zahl der gemessenen Resonanzen ungefähr so groß ist wie die Zahl, die durch das Modell nahegelegt wird. Verbindliche Vorhersagen sind in diesem Modell nicht möglich.

Zusammenfassendes Bild

Zusammenfassend soll noch ein sehr aufschlußreiches Bild des elastischen Streuvorganges ($\theta_{c.m.} = 90^{o}$) über einen weiten Energiebereich gezeichnet werden, das die Analyse des für $^{16}O + ^{16}O$ verfügbaren Datenmaterials vermittelt. Im großen und ganzen lassen sich die Resonanzen in drei Kategorien unterteilen.

1. Kategorie

Im Energiebereich der Coulomb Barriere liegen relativ scharfe Resonanzen mit einer Breite in der Größenordnung von 0.1 MeV vor [98].

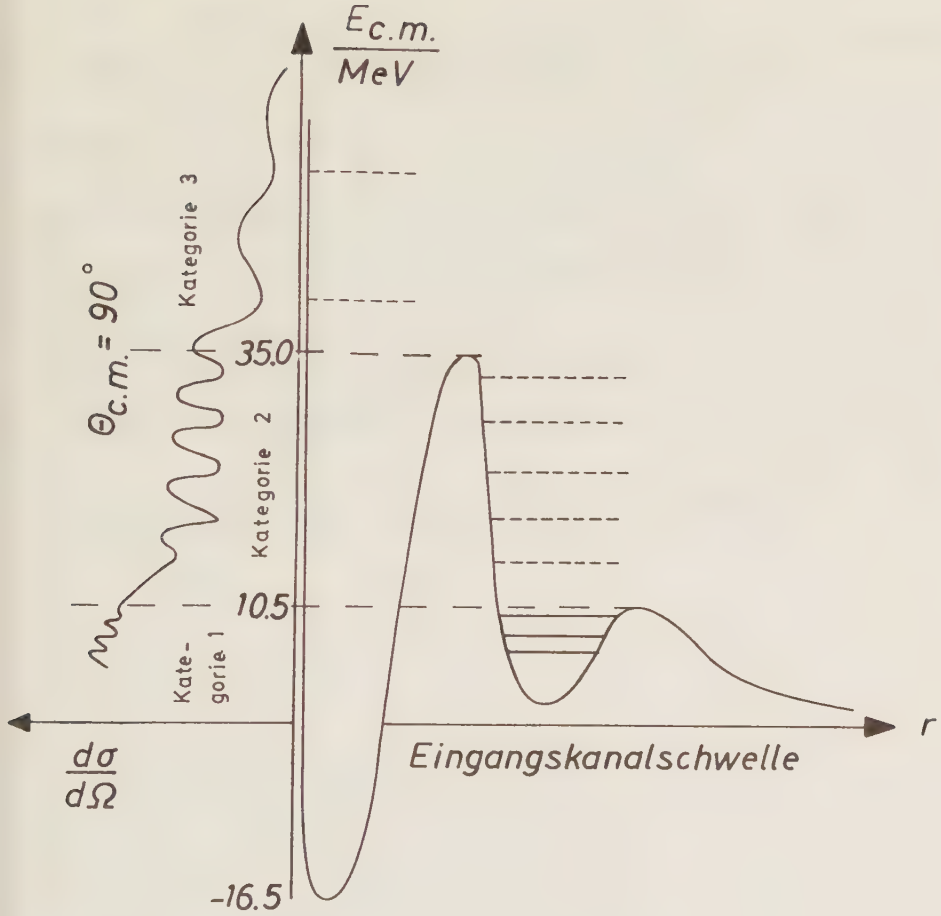
2. Kategorie

Oberhalb der Coulomb Barriere bis zu $E_{c.m.} \approx 35$ MeV verbreitern sich die Resonanzen auf die Größenordnung von 1MeV, während der differentielle Wirkungsquerschnitt um fast zwei Größenordnungen abfällt [99, 100].

3. Kategorie

Im darüberliegenden Energiebereich steigt die Breite auf 10 MeV an und der Wirkungsquerschnitt fällt nochmals um zwei Größenordnungen ab [101].

In der Figur 1.4 ist ein reales Streupotential schematisiert, das in der Lage ist, die Charakteristika der Streudaten zu reproduzieren. Die Resonanzen der Kategorie 1 bzw. 2 werden durch quasigebundene bzw. virtuelle Zustände der vorgelagerten Potentialmulde verursacht, während die Resonanzen der Kategorie 3 mit den virtuellen Zuständen des Potentialtopfes des Compoundkerns in Zusammenhang stehen.



Figur 1.4

Schematische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Eigenschaften des Wechselwirkungspotentials und Strukturen in der Anregungsfunktion ($\Theta_{c.m.} = 90°$) für die elastische Streuung $^{16}O + ^{16}O$. (Weitere Erklärungen sind im Text zu finden.)

Motivation der Suche nach einem mikroskopischen Mechanismus

Alle diese Modelle sind rein phänomenologischer Natur, so daß bis heute eine allgemeine mikroskopische Grundlage fehlt, um das Phänomen der nuklearen Molekülresonanzen zu verstehen. Die mikroskopischen Rechnungen (siehe Tabelle 1.1) zeigen zwar, daß durch das Pauli Prinzip die kollidierenden Fragmente auf Distanz gehalten werden können und Moleküle sich ausbilden, aber das ist keine Erklärung, warum in manchen Systemen das Phänomen auftritt und in anderen nicht, bei denen genauso das Pauli Prinzip Gültigkeit besitzt. Ein Ziel dieser Arbeit wird es sein, den mikroskopischen Mechanismus zu finden, der für dieses Phänomen verantwortlich ist und auf eine ganz natürliche Weise erklärt, warum nur manche Systeme Molekülstruktur besitzen.

KAPITEL 2

2. U(3)-SYMMETRIE

Vor der Erörterung des komplexeren Problems – der U(3)-Beschreibung einer Kernreaktion – ist es zweckmäßig, Vorüberlegungen anzustellen. Vorab ist die Frage zu klären, wie ein A_i-Teilchenzustand des i-ten Clusters, der an der Kernreaktion beteiligt ist, klassifiziert werden kann. Eine Antwort hierauf wurde auf der Basis von harmonischen Oszillatoreinteilchenfunktionen von Kramer und Moshinsky[102]) gegeben.

2.1 Klassifizierung eines A_i-Teilchenzustandes

Tabelle 2.1

Klassifizierungsschema

		$U(3A_i)$		
		V		
$[h_1h_2h_3]$	$U(3)$	X	$U(A_i)$	$[h_1h_2h_30\ldots0]$
	V		V	
L	$SO(3\mathbb{R})$		$S(A_i)$	f
	V		V	
M	$SO(2\mathbb{R})$		$S(A_i-1)$	
			V	
			.	
			.	r
			.	
			$S(1)$	

Ausgangspunkt ist die unitäre Gruppe $U(3A_i)$ von A_i Teilchen im 3-dimensionalen Konfigurationsraum.

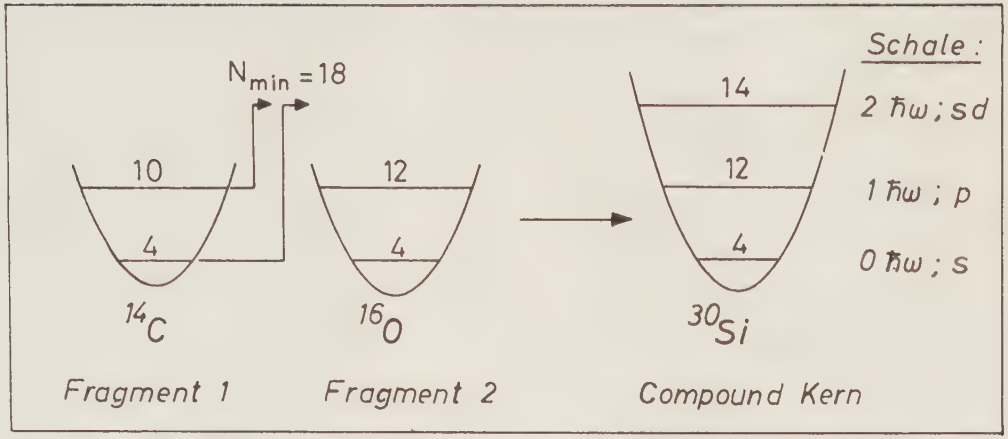
Gemäß dieser Interpretation bietet sich eine Zerlegung in die unitären Gruppen U(3) und $U(A_i)$ an. Die Gruppe U(3) wirkt auf die 3 Konfigurationsin-

dizes, während die Gruppe $U(A_i)$ auf die Teilchenindizes wirkt. Wie von Moshinski gezeigt wurde[103], legt eine beliebige irreduzible Darstellung (ID) $[h_1 h_2 h_3]$, $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq 0$ von U(3) auch gleichzeitig die ID $[h_1 h_2 h_3 0 \ldots 0]$ von $U(A_i)$ fest. Die Ursache hierfür liegt in der einfachen ID $[N_i 0 \ldots 0]$ von $U(3A_i)$, die die N_i Quanten des A_i-Teilchenzustandes charakterisiert.
$SO(3\mathbb{R})$ als Untergruppe von U(3) liefert den Drehimpuls L und die Untergruppe $SO(2\mathbb{R})$ die Quantenzahl M.
Die ID der symmetrischen Gruppe $S(A_i)$ — einer Untergruppe von $U(A_i)$ — ist durch das Young Diagramm f gegeben. Die Zustände in diesem Darstellungsraum können über die Untergruppenkette $S(A_i-1) > S(A_i-2) > \ldots S(1)$ mittels des Young Tableaus r gekennzeichnet werden.

Ein Vergleich mit dem Elliott'schen Modell[1] zeigt, daß die bezogenen Positionen grundverschieden sind; denn Elliott benutzte die Gruppe U(6) zur Beschreibung der 6 Bahnzustände in der sd-Schale als Ausgangspunkt. Dennoch besitzen beide Klassifizierungsschemata über die U(3)-Gruppe einen gemeinsamen Berührungspunkt. Durch das im Klassifizierungsschema hervorgehobene U(3)-Fenster möchte ich im folgenden die Kernreaktionen beobachten.

2.2 Die U(3)-Symmetrie der Relativbewegung

Um die Rolle der Relativbewegung im U(3)-Bild zu verstehen, ist es wohl am zweckmäßigsten, auf ein Beispiel zurückzugreifen. Man stelle sich vor, daß sich aus $^{14}C + ^{16}O$ der Compoundkern ^{30}Si bilde (siehe Fig. 2.1). Im Schalenmodell wird der Grundzustand von ^{14}C aus 4 s- und 10 p- Nukleonen gebildet. ^{16}O besitzt eine geschlossene sp-Schale und im Compoundkern ^{30}Si befinden sich über einem ^{16}O-Core 14 sd-Nukleonen. Um den nicht quantenangeregten Compoundkern zu bilden, müßen 4 Nukleonen z.B. des 1. Fragments von der s- in die sd-Schale gehoben werden. Außerdem sind noch 10 p-Nukleonen um jeweils $1\hbar\omega$ in die sd-Schale anzuheben. Die Compoundkernbildung verlangt aufgrund des Pauli Prinzips also mindestens $N_{min} = 18$ zusätzliche Quanten, die von der Relativbewegung zur Verfügung gestellt werden müßen. Unabhängig vom Beispiel läßt sich ganz allgemein festhalten, daß in der Relativbewegung $N \geq N_{min}$ Oszillatorquanten stecken

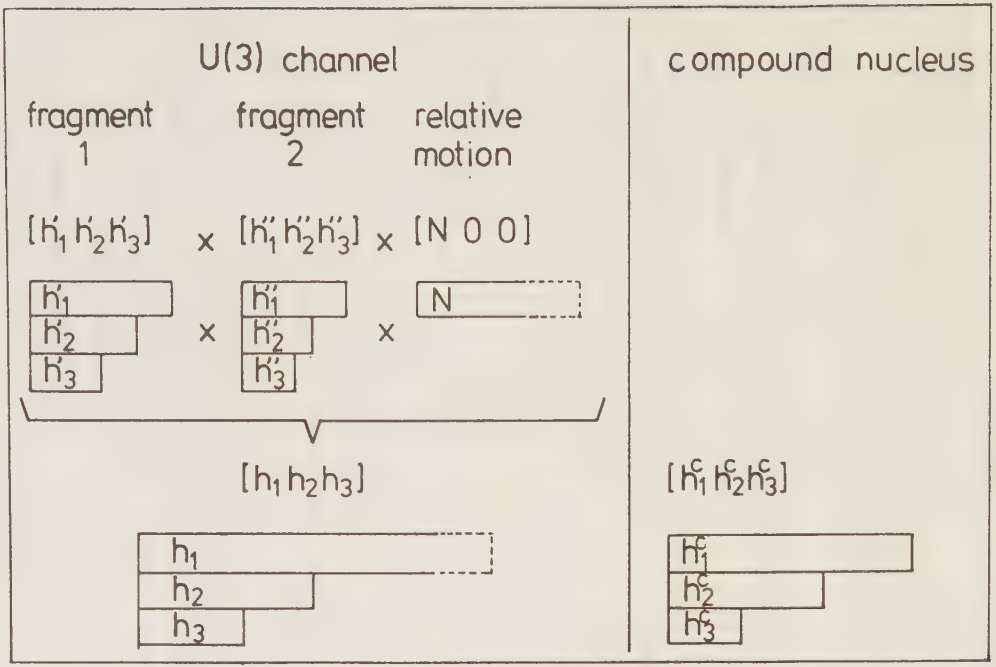


Figur 2.1
Schematische Schalenmodellbeschreibung der Compoundkernbildung zweier Fragmente. Die Erläuterung erfolgt am Beispiel $^{14}C + {}^{16}O \longrightarrow {}^{30}Si$.

müssen. Hinsichtlich der U(3)-Klassifizierung bedeutet das, daß die Relativbewegung durch die Darstellungen [N00] beschrieben wird.
Es ist ganz wichtig anzumerken, daß das einfache Bild, das in der Figur 2.1 dargestellt ist, in vielen Fällen auf einen zu kleinen Wert für N_{min} führt. Das heißt, daß es gar nicht möglich ist, die Compoundkerne in einem nicht quantenangeregten Zustand zu bilden. Es wird sich zeigen, daß das angegebene Beispiel in der Figur 2.1 ein solcher Fall ist. Die Ursache ist das U(3)-Prinzip, aus dem auch folgt, wie hoch die Quantenanregung des Compoundkerns mindestens sein muß und welche Konfigurationen erlaubt sind.

2.3 Die U(3)-Symmetrie in der Kollision zweier Fragmente

In der Einleitung ist bereits darauf hingewiesen worden, daß in der Realität der Zustand eines Fragments i.a. einer Mischung verschiedener ID von U(3) entspricht. Aus Gründen der Transparenz wird die Diskussion zunächst auf der Grundlage einer idealen U(3)-Symmetrie durchgeführt. Es wird also angenommen, daß ein Zustand eines Clusters durch eine einzige ID charakterisiert wird. Die so gewonnenen Ergebnisse lassen sich dann später in ein reales Bild einbetten.
In der Figur 2.2 ist die Kollision zweier Fragmente im U(3)-Bild dargestellt. Die Beschreibung des A_1-bzw. A_2-Teilchenzustandes von Fragment 1 bzw. Fragment 2 führt auf die ID $[h'_1 h'_2 h'_3]$ bzw. $[h''_1 h''_2 h''_3]$. Die Relativbewegung ist durch [N00] charakterisiert. In der angegebenen äquivalenten Diagrammschreibweise gibt das Symbol in einer Diagrammzeile die Anzahl der enthaltenen Kästchen an. Unter Beachtung der Littlewood Regeln (z.B. Ref. [104, 105])) können aus den drei Diagrammen die Gesamt-U(3)-Diagramme $[h_1 h_2 h_3]$ konstruiert werden [14]). Der Satz von A-Teilchenzuständen ($A = A_1 + A_2$), der aus der Kopplung fest vorgegebener Diagramme der beiden Fragmente und der Relativbewegung resultiert, wird als U(3)-Kanal-Set bezeichnet. Ist zusätzlich zu den gemachten Voraussetzungen auch das Gesamt-U(3)-Diagramm fixiert, so liegt ein U(3)-Kanal vor.
U(3)-Kanäle sind eine Verallgemeinerung von Spinkanälen, insofern als an die Stelle der Spins die U(3)-Darstellungen treten.



Figur 2.2

Kollision zweier Fragmente im U(3)-Bild.

Nun betrachte ich den Compoundkern und seine A-Teilchenzustände, die durch die Darstellungen $[h_1^c h_2^c h_3^c]$ oder durch Überlagerungen davon charakterisiert seien. Für den Compoundkern wird also keine ideale U(3)-Symmetrie vorausgesetzt!

Das Ziel ist, die in einem beliebigen U(3)-Kanal-Set vorliegende U(3)-Symmetrie mit der im Compoundkern realisierten zu vergleichen.

Tabelle 2.2

Kollisionstypen, für die eine U(3)-Analyse durchgeführt wurde.

Typ	Fragment 1	Fragment 2	Compoundkern
1 a	$s\cdots$	$s\cdots$	$s\cdots$
b			$s^4p\cdots$
2 a	$s\cdots$	$s^4p\cdots$	$s^4p\cdots$
b			$s^4p^{12}(sd)\cdots$
3 a	$s^4p\cdots$	$s^4p\cdots$	$s^4p\cdots$
b			$s^4p^{12}(sd)\cdots$

In einem ersten Schritt werden für die in der Tabelle 2.2 aufgeführten Kollisionstypen die Gesamt-U(3)-Diagramme der U(3)-Kanal-Sets mit den Darstellungen der nicht quantenangeregten Compoundkerne verglichen. Diese Voranalyse zeigt, daß nur in Kollisionen vom Typ 3b —— d.h. in der Kollision zweier sp-Fragmente —— Auswahlregeln auftreten, in dem Sinne, daß die Bildung von Compoundzuständen der Konfiguration $s^4p^{12}(sd)\cdots$ über U(3)-Kanal-Sets strikt verboten sein kann. Eine Studie des experimentellen Datenmaterials [82]) zeigt, daß hinsichtlich der 6 Kollisionstypen der Tabelle 2.2 nur in den Kollisionen vom Typ 3b nukleare Molekülresonanzen beobachtet wurden. Das legt die Vermutung nahe, daß die Inkompatibilität der U(3)-Symmetrie im Eingangskanal einerseits und dem Compoundkern

andererseits zu nuklearen Molekülen führt. Zu diesem Sachverhalt werde ich in der weiteren Abhandlung ein detailierteres Bild entwickeln.
Eine eingehendere Untersuchung der Kollisionen vom Typ 3b zeigt, daß die Inkompatibilität durch das folgende U(3)-Prinzip, in dem das Pauli Prinzip eingeschlossen ist, verursacht wird.

Bei Vorliegen eines gesamt-U(3)-Diagramms $[h_1 h_2 h_3]$ eines U(3)-Kanals mit $h_1 - h_3 > 12$ kann die niedrigste Schalenkonfiguration $s^4 p^{12} (sd) \cdots$ nicht gebildet werden.

Trifft die Voraussetzung für alle Gesamt-U(3)-Diagramme eines U(3)-Kanal-Sets zu, gilt ein Bildungsverbot für den vollständigen U(3)-Kanal-Set.

In einem zweiten Schritt werden die Diagramme der U(3)-Kanal-Sets auch mit den Diagrammen quantenangeregter Schalenkonfigurationen verglichen. O.B.d.A. gelte $h'_1 - h'_2 > h''_1 - h''_2$. Die Quantenanregung des Compoundkerns werde mit m bezeichnet. Dann gelten die folgenden Regeln, die auf dem U(3)-Prinzip beruhen :

(1) Für die Fragmente 1 bzw. 2 ist bezüglich der U(3)-Diagramme $[h'_1 h'_2 h'_3]$ bzw. $[h''_1 h''_2 h''_3]$, für die

$$h'_1 + h''_2 + 2 (h'_3 + h''_3) > 16 + 2 m$$

gilt, die Bildung eines Compoundkerns mit einer m-quantenangeregten Schalenkonfiguration verboten.

(2) Wenn für feste U(3)-Diagramme der Fragmente n der kleinste Wert von m ist, für den die Ungleichung nicht erfüllt ist, dann ist nur die Bildung der ganz speziellen Schalenkonfiguration

$$s^4 p^{12} (sd)^{A-16-n} (pf)^n$$

des Compoundkerns erlaubt.

Die Regel (1) erlaubt, Kandidaten für nukleare Molekülresonanzen aufzuspüren. Eine Auflistung erfolgt in der Tabelle 2.3, die folgendermaßen zu lesen ist:

Tabelle 2.3

Kandidaten für nukleare Molekülresonanzen

A	n	frag. 1 $[h'_1 h'_2 h'_3]$	frag. 2 $[h''_1 h''_2 h''_3]$	fragment 1	fragment 2
25	1	[3 1 1]	[4 4 4]	^{9}Li ^{9}Be ^{9}B ^{9}C	^{16}O
	1	[4 2 2]	[3 3 3]	^{12}Be ^{12}B ^{12}C ^{12}N ^{12}O	^{13}B ^{13}C ^{13}N ^{13}O
26	1	[2 2 2]	[4 4 4]	^{10}He ^{10}Li ^{10}N ^{10}O	
	1	[4 1 1]		^{10}Be ^{10}B ^{10}C	^{16}O
	1	[3 2 1]		^{10}Li ^{10}N	
	1	[3 2 2]	[4 4 3]	^{11}Li ^{11}Be ^{11}B ^{11}C ^{11}N ^{11}O	^{15}N ^{15}O
	1	[4 2 2]	[4 3 3]	^{12}Be ^{12}B ^{12}C ^{12}N ^{12}O	^{14}C ^{14}N ^{14}O
	1	[3 3 2]			
	1	[4 3 2]	[3 3 3]	^{13}B ^{13}C ^{13}N ^{13}O	^{13}B ^{13}C ^{13}N ^{13}O
	1	[3 3 3]			
27	1	[4 2 1]	[4 4 4]		
	1	[3 3 1]		^{11}Be ^{11}B ^{11}C ^{11}N	^{16}O
	2	[3 2 2]		^{11}Li ^{11}O	
	1	[4 2 2]	[4 4 3]	^{12}Be ^{12}B ^{12}C ^{12}N ^{12}O	^{15}N ^{15}O
	1	[3 3 2]			
	1	[4 3 3]	[4 3 2]		
	1	[4 4 2]	[3 3 3]	^{14}C ^{14}N ^{14}O	^{13}B ^{13}C ^{13}N ^{13}O
	2	[4 3 3]			
28	1	[4 3 1]	[4 4 4]		
	2	[4 2 2]		^{12}Be ^{12}B ^{12}C ^{12}N ^{12}O	^{16}O
	2	[3 3 2]			
	1	[4 3 2]	[4 4 3]	^{13}B ^{13}C ^{13}N ^{13}O	^{15}N ^{15}O
	2	[3 3 3]			
29	1	[4 4 1]	[4 4 4]		
	2	[4 3 2]		^{13}B ^{13}C ^{13}N ^{13}O	^{16}O
	3	[3 3 3]			
	1	[4 4 2]	[4 4 3]	^{14}C ^{14}N ^{14}O	^{15}N ^{15}O
	2	[4 3 3]			
30	2	[4 4 2]	[4 4 4]	^{14}C ^{14}N ^{14}O	^{16}O
	3	[4 3 3]			
	2	[4 4 3]	[4 4 3]	^{15}N ^{15}O	^{15}N ^{15}O
31	3	[4 4 3]	[4 4 4]	^{15}N ^{15}O	^{16}O
32	4	[4 4 4]	[4 4 4]	^{16}O	^{16}O

Wenn die Relativbewegung eine Anregung von weniger als n zusätzlichen Oszillatorquanten trägt oder anders formuliert, wenn $N < N_{min} + n$, können die Fragmente mit den U(3)-Darstellungen $[h'_1 h'_2 h'_3]$ und $[h''_1 h''_2 h''_3]$ den Compoundkern mit der Massenzahl A über die in Frage kommenden U(3)-Kanal-Sets nicht bilden. Zur Erläuterung wird das Beispiel der Figur 2.1 nochmals aufgegriffen. Man betrachte die Darstellungen [442] bzw. [444] von ^{14}C bzw. ^{16}O. Hier besagt n=2, daß die Compoundkernbildung für die U(3)-Kanal-Sets untersagt ist, in denen die Relativbewegung weniger als 2 zusätzliche Oszillatorquanten trägt. Die Forderung muß also in Wirklichkeit $N \geq N_{min} + 2 = 20$ lauten. Denkt man sich die Darstellung von ^{14}C durch [433] ersetzt, dann gilt wegen n=3 die Bedingung $N \geq 21$. Die Kollision zweier ^{16}O-Kerne ist ebenfalls in der Tabelle erwähnt. Für die U(3)-Darstellungen [444] sind, wie wohlbekannt ist, mindestens 4 zusätzliche Oszillatorquanten in der Relativbewegung erforderlich ($N \geq 24$).

Bemerkungen :

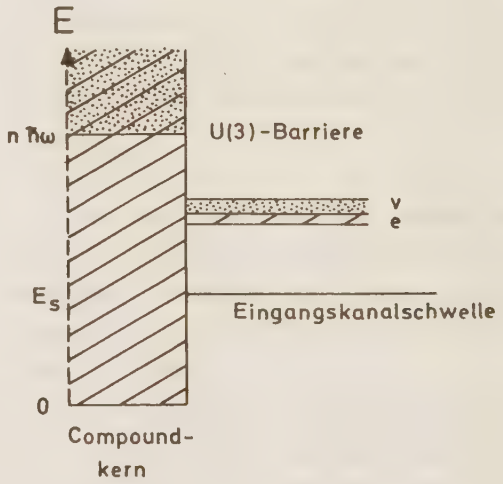
(1) Die Tabelle 2.3 erfaßt unter Umständen nicht alle Auswahlregeln. Die Ursache liegt in dem Beweis der Regel (1), in welchem letztendlich ein komplexes Ungleichungssystem, das durch die Littlewood Regeln induziert wird, zu lösen ist. Wieviele Kandidaten erfaßt werden können, hängt von der Güte des analytischen Lösungsweges ab.

(2) Nur die Kandidaten sind aufgeführt, für die hinsichtlich vollständiger U(3)-Kanal-Sets die Compoundkernbildung verboten ist. Ich werde noch zeigen, daß auch Fälle auftreten, in denen nur einzelne U(3)-Kanäle betroffen sind, z.B. in der Kollision $^{12}C + ^{16}O$ mit den Darstellungen [440] und [444].

(3) In der Tabelle sind auch Diagramme aufgeführt, die in der Realität erst in angeregten Zuständen der Fragmente eine wesentliche Rolle spielen. Nichts desto trotz können Beimischungen davon im Grundzustand eines Fragments auftreten. Außerdem werden diese Diagramme in Ausgangskanälen wichtig.

Ich kehre jetzt zu der Frage zurück, wie sich die Ergebnisse in ein reales Bild einbetten lassen.

Der Grundzustand eines Fragments ist eine Überlagerung verschiedener Darstellungen von U(3). Durch Herausgreifen eines Diagrammes des Grundzustandes von Fragment 1 und eines des Grunzustandes von Fragment 2 lassen sich Diagrammpaare bilden, denen zu gegebenem N jeweils ein U(3)-Kanal-Set zugeordnet ist. In der Realität hat man es also im U(3)-Bild bei gegebenem N mit einer Überlagerung von verschiedenen U(3)-Kanal-Sets zu tun. Darüber hinaus ist N variabel. Für eines der Diagrammpaare gelte für $N < N_{min} + n$ ein Compoundkernbildungsverbot. Die Überlagerung verschiedener U(3)-Kanal-Sets läßt sich dann für ein $N < N_{min} + n$ in zwei Anteile v und e zerlegen (siehe Figur 2.3).



Figur 2.3
Die U(3)-Barriere

Für den erlaubten Anteil e (schraffiert) ist die Bildung des Compoundkerns möglich. Für den anderen Anteil v (punktiert) ist der nicht punktierte Compoundkernbereich gesperrt. Das teilweise Bildungsverbot wird aufgehoben, sobald in der Relativbewegung mindestens n zusätzliche Oszillatorquanten zur Verfügung stehen. Interpretiert man diese n Quanten im Compoundkernsystem, so bedeutet das, daß der Bereich unterhalb der U(3)-Barriere $n\hbar\omega$ für den punktierten Anteil v verboten ist. Die Wechselwirkung zwischen den Fragmenten kann zur Bildung eines Quasimoleküls führen, wobei die Barriere eine Verschmelzung behindert. Wegen des Anteils e gibt es eine gewisse

Wahrscheinlichkeit, daß die nuklearen Molekülresonanzen über den Compoundkern zerfallen. Sehr gute Voraussetzungen für die Beobachtbarkeit sind gegeben, wenn-bildlich gesprochen-die U(3)-Barriere weit über die Eingangskanalschwelle und möglichst noch über die Coulomb Barriere hinausragt und der verbotene Anteil v beträchtlich ist. Ersteres kann durch ein relativ großes n (d.h. $n>2$) gewährleistet werden, letzteres ist z.B. bei $s^4p\cdots$-Fragmenten der Fall, in deren Grundzustand eine ID dominiert.

Wichtig ist auch, daß die Molekülbildung durch den konkurierenden Direktreaktionsmechanismus nicht gestört wird. Sind nämlich sehr viele Direktreaktionskanäle offen, kann das System auf diesen Wegen die Molekülbildung umgehen.

Augenblicklich hat es den Anschein, daß die Kandidaten der Tabelle 2.3 mit einem kleinen Wert für n (n=1) für Molekülresonanzen nicht in Frage kommen. Ich werde an Beispielen zeigen, daß diese Befürchtungen nicht begründet sind. Das liegt daran, daß die einzelnen U(3)-Kanäle, die in einem U(3)-Kanal-Set zusammengefaßt sind, unterschiedlich hohe U(3)-Barrieren sehen. Ich habe bisher nur eine Aussage über die kleinste Barriere gemacht, die innerhalb eines Sets von einem U(3)-Kanal gesehen wird. Die anderen U(3)-Kanäle des Sets können durchaus höhere Barrieren sehen. Ist n groß, so kann der ganze U(3)-Kanal-Set am Phänomen nuklearer Molekülresonanzen effektiv beteiligt sein. Ist n klein, so können trotzdem einzelne U(3)-Kanäle wegen ihrer spezifisch hohen Barriere das Phänomen verursachen.

Fälle mit n=0 sind in der Tabelle 2.3 nicht aufgeführt, aber an dem mikroskopisch gerechneten Beispiel $^{12}C + ^{16}O$ (n=0) werde ich zeigen, daß die U(3)-Barrieren, die von den einzelnen U(3)-Kanälen gespürt werden, bis $4\hbar\omega$ reichen. Im Allgemeinen ist der Sachverhalt also komplexer, als in der Figur 2.3 dargestellt wurde, insofern als verschieden hohe U(3)-Barrieren in einem System eine Rolle spielen können.

An dieser Stelle ist ein weiteres, zukünftiges Ziel zu erkennen; eine U(3)-Analyse, die auf U(3)-Kanäle verfeinert ist, und die jeweilige Barriere für jeden einzelnen U(3)-Kanal liefert.

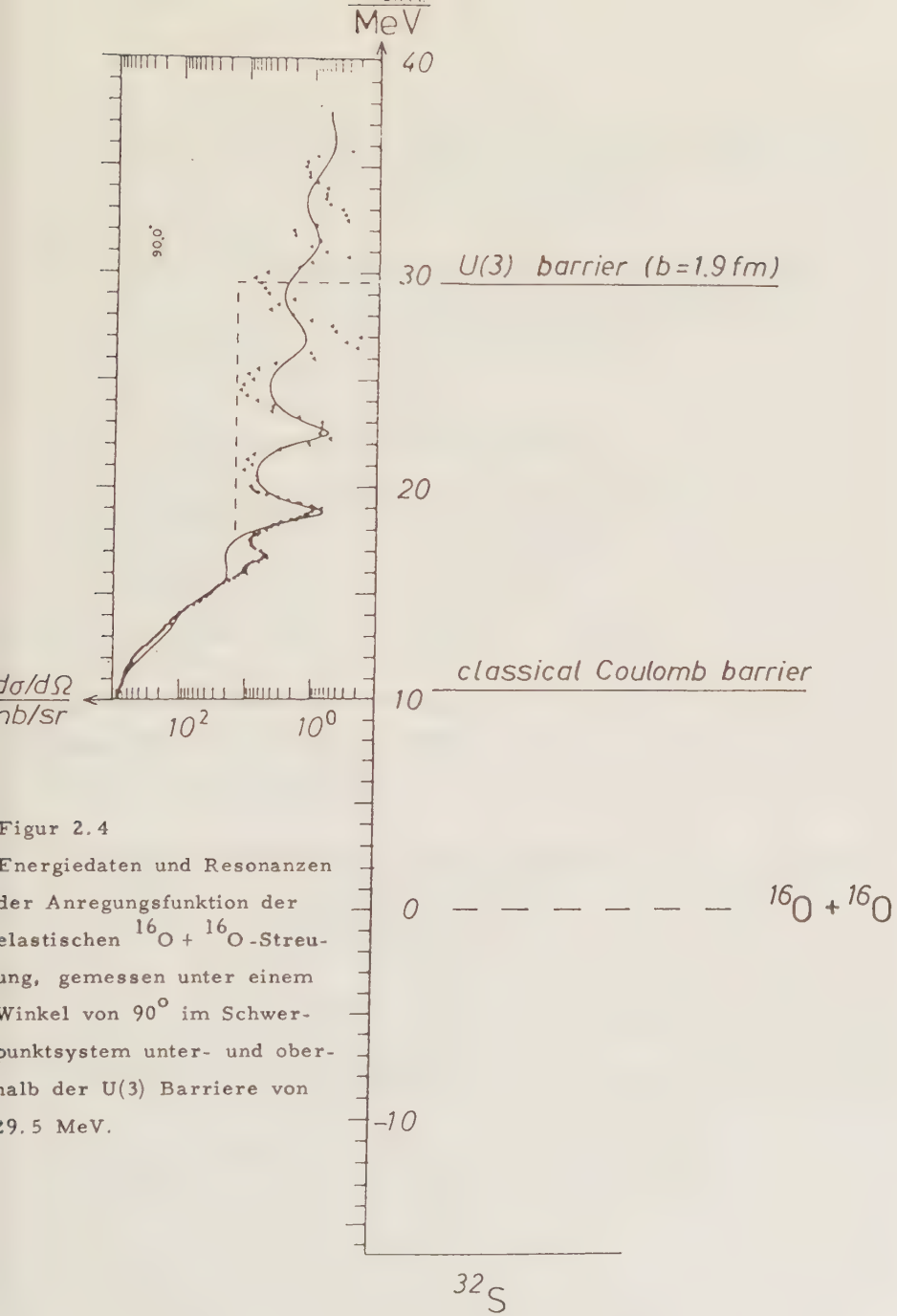
Bemerkungen zur U(3)-Barriere

Die U(3)-Barriere gibt lediglich einen ungefähren Anhaltspunkt, bis zu welcher Energie ($n\hbar\omega$) ein Compoundkernbereich für einen U(3)-Kanal schwer zugänglich ist. Die eigentliche Aussage lautet, daß nur Compoundzustände mit einer Quantenanregung $\geq n$ erlaubt sind. Diese Zustände, insbesondere die n-quantenangeregten Zustände können aber auch schon vereinzelt unterhalb der U(3)-Barriere auftreten. Gemäß der Regel (2) können die n-quantenangeregten Zustände aber nur angesprochen werden, wenn sie eine ganz spezielle Schalenkonfiguration besitzen. Das Entscheidende ist, daß in dem Bereich unterhalb der U(3)-Barriere von den außerordentlich vielen Zuständen allenfalls nur einzelne zugänglich sind. Die Barriere kann also in einem gewissen Maße transparent sein.

Bemerkungen zur mathematischen Durchführung

Mathematisch wird so verfahren, daß die verbotenen U(3)-Kanäle eliminiert werden (Problem der Redundanz) und in die Rechnung gar nicht explizit eingehen. Sie werden aber indirekt dadurch berücksichtigt, daß durch ihre Elimination die Information über die zugehörige(n) Barrierenhöhe(n) in die Rechnung einfließt. Die physikalische Rechtfertigung der Elimination der verbotenen Kanäle (z.B. in einer quasigebundenen Rechnung) ist leicht zu geben. Zu diesem Zweck stelle man sich vor, daß ein U(3)-Kanal vorliegt, der fast verboten ist. Bei einer Annäherung der beiden Fragmente macht sich die Inkompatibilität der U(3)-Symmetrie immer stärker bemerkbar. Eine stetige Annäherung der beiden Fragmente bis auf Moleküldistanz kann also nur stattfinden, wenn der fast verbotene U(3)-Kanal mehr und mehr unterdrückt wird. Bei völlig verbotenen U(3)-Kanälen läuft das auf eine totale Unterdrückung hinaus (→ Elimination).
Ich werde im nächsten Kapitel auch noch eine mikroskopische Rechnung präsentieren, die diesen Sachverhalt sehr schön illustriert.

Als nächstes wird die soeben entwickelte Modellvorstellung an dem System $^{16}O + {}^{16}O$ diskutiert. In jeder Hinsicht sollte dieses System ein guter Kandidat für das Phänomen nuklearer Molekülresonanzen sein. Zum einen ist



Figur 2.4
Energiedaten und Resonanzen der Anregungsfunktion der elastischen $^{16}O + ^{16}O$-Streuung, gemessen unter einem Winkel von 90° im Schwerpunktsystem unter- und oberhalb der U(3) Barriere von 29.5 MeV.

n=4, es liegt also eine hohe U(3)-Barriere vor ; zum andern ist die Darstellung [444] im ^{16}O-Grundzustand dominant, d.h. der v-Anteil ist außerordentlich stark. Ferner sind im Energiebereich, der hier betrachtet wird, nur wenige Direktreaktionskanäle offen. Als formale Besonderheit kommt in diesem System hinzu, daß ein U(3)-Kanal-Set aus nur einem U(3)-Kanal besteht. Beide Begriffe sind also äquivalent.

Die energetischen Verhältnisse sind in der Figur 2.4 wiedergegeben. Der Grundzustand des Compoundkerns ^{32}S liegt 16.5 MeV unterhalb der Eingangsschwelle ^{16}O + ^{16}O. Bis $E_{c.m.}$ = 10.5 MeV reicht die klassische Coulomb Barriere, die von der U(3)-Barriere ($4\hbar\omega$) bei zugrundelegen eines Oszillatorparameters b_0 = 1.9 fm um 19 MeV überragt wird. Die elastische Anregungsfunktion, gemessen bei $\theta_{c.m.} = 90^o$, wird im gezeigten Energiebereich durch 5 nukleare Molekülresonanzen geprägt. Unterhalb der U(3)-Barriere sollte die Wahrscheinlichkeit relativ klein sein, daß die Molekülresonanzen über den Compoundkern zerfallen. Eine ähnliche Gestalt der Resonanzen sollte erwartet werden. Oberhalb der Barriere nimmt die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls in den Compoundkern zu; die Bildung nuklearer Moleküle wird gedämpft. Es sollte (in Übereinstimmung mit der Beobachtung) ein Trend zu breiteren und weniger stark ausgeprägten Resonanzen bestehen.

Im Vergleich zu ^{16}O + ^{16}O zeigt das System $\alpha + \alpha$ ein ganz anderes Verhalten. Das scheint auf den ersten Blick befremdend, da ebenfalls zwei identische Fragmente mit einer geschlossenen Schale kollidieren. Aber im U(3)-Bild wird sofort verständlich, warum keine Molekülbande, sondern die Grundzustandsbande des Compoundkerns ^{8}Be angesprochen wird. Die U(3)-Kanäle sehen keine U(3)-Barrieren. Dem zu folge wird kein Molekül gebildet, da das System $\alpha + \alpha$ ungehindert in den Compoundkern übergehen kann.

KAPITEL 3

3. DISKUSSION DER ERGEBNISSE DER MIKROSKOPISCHEN RECHNUNGEN

Bisher wurde mit allgemeinen, gruppentheoretischen Methoden die Rolle der U(3)-Symmetrie in der Kollision zweier Fragmente diskutiert. Nun sollen in diesem Kapitel die Betrachtungen vertieft und mit mikroskopischen Rechnungen untermauert werden. Zu diesem Zweck stelle ich für eine Interpretation einige der anschaulichsten Ergebnisse zusammen und werde auch weiterhin der Allgemeinverständlichkeit halber — auf mathematischen Balast verzichtend — nur den Rahmen der Theorie skizieren.

Ausgehend von der projektiven Schrödingergleichung [106])

$$(\delta\Psi|H-E|\Psi) = 0 \quad , \tag{1}$$

in der die total antisymmetrische Wellenfunktion die beiden Fragmente und deren Relativbewegung beschreibt, kann nach der Abspaltung der Schwerpunktsbewegung die Gleichung

$$\int(\mathcal{H}(\xi_1,s_1) - E\,\mathcal{N}(\xi_1,s_1))u(s_1)\,d\mu(s_1) \tag{2}$$

abgeleitet werden. Zwei Hauptprobleme treten auf. Zum einen der Wechselwirkungsintegralkern $\mathcal{H}(\xi_1,s_1)$, in dem der dynamische Aspekt der Kollision eingeschlossen ist, und zum andern der Normkern $\mathcal{N}(\xi_1,s_1)$, der das Pauli und U(3)-Prinzip beinhaltet. Die Gewichtsfunktion $u(s_1)$ hängt von der komplexen Relativkoordinate s_1 ab und $d\mu(s_1)$ ist das Bargmann Maß.

3.1 Die Eigenwerte der Normoperatoren der Systeme $^{16}O + ^{12+b}X$, $0 \leq b \leq 4$; $\alpha + \alpha$ und $\alpha + ^{16}O$

Aus einem Normeigenwert läßt sich im wesentlichen die Stärke ablesen, mit der ein U(3)-Kanal vertreten ist. Eine Analyse der Eigenwertprobleme (EWP) der Normoperatoren gibt daher Aufschluß über verbotene (EW = 0) und erlaubte U(3)-Kanäle (EW > 0). Bezüglich der detailierten Theorie und Referenzen wird auf Kapitel 5 verwiesen.

Zunächst sind wichtige Aussagen hervorzuheben:

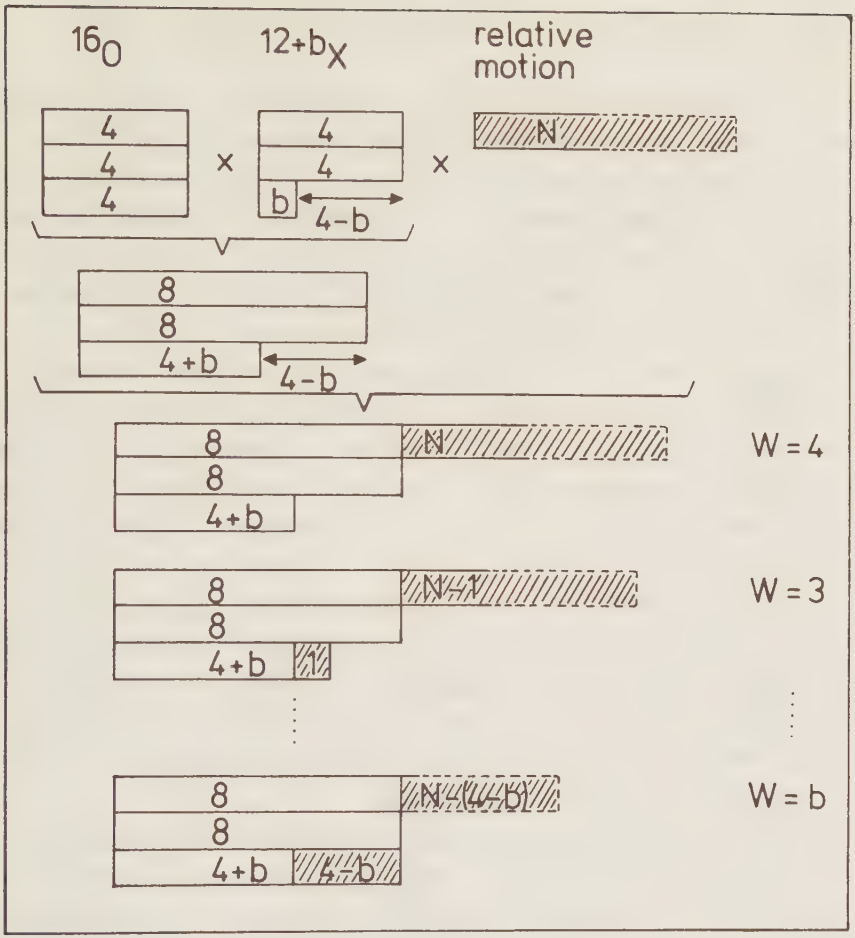
(1) Die Normkerne sind im U(3)-Schema diagonal.

(2) Die Eigenwerte sind hochgradig drehimpulsentartet und die Dimension einer Darstellung von U(3) gibt den Grad der Entartung an. Demzufolge ist eine Drehimpulsklassifizierung vollständig überflüßig und unzweckmäßig.

(3) Um die Eigenwerte zu charakterisieren benötigt man den Parameter $0 \leq b \leq 4$, der das zweite Fragment fixiert, und zwei U(3)-Quantenzahlen. Eine U(3)-Quantenzahl ist durch die Darstellung [N00] der Relativbewegung gegeben. Die andere Quantenzahl durch den sogenannten U(3)-Kopplungsmod $b \leq W \leq 4$.

Die Bedeutung dieser Quantenzahl W wird in der Figur 3.1 erläutert. Für ein beliebiges N wird das äußere Produkt [444] x [44b] x [N00] für die Kollision $^{16}O + ^{12+b}X$ ausreduziert. Im ersten Schritt führt die Reduktion von [444] x [44b] auf die U(3)-Symmetrie [884+b] der Fragmente. In einem zweiten Schritt muß die Relativbewegung hinzugekoppelt werden. Die U(3)-kopplungsmodquantenzahl W = 4 bedeutet, daß das gesamte einzeilige Diagramm an die erste Zeile des drei-zeiligen Diagramms [884+b] angefügt wird. Die Quantenzahl W = 3 entspricht jenem Fall, in dem ein Kästchen abgeschnitten und in die dritte Zeile gesetzt wird. Das Verfahren bricht ab, sobald 4 - b Kästchen abgetrennt sind, da dann das Loch in der dritten Zeile aufgefüllt ist. Zu gegebenem b gehören also 5 - b U(3)-Kopplungsmoden, wobei mit wachsendem N das Gesamt-U(3)-Diagramm mehr und mehr gestreckt wird.

Mit diesen U(3)-Kopplungsmoden lassen sich die U(3)-Kanäle, die zu einem U(3)-Kanal-Set gehören, unterscheiden.



Figur 3.1

U(3)-Kopplungsmoden in den Kollisionen $^{16}O + ^{12+b}X$, $0 \leq b \leq 4$;

Neben dieser gruppentheoretischen Bedeutung von W gibt es sehr wichtige physikalische Bezüge, auf die ich gleich zu sprechen kommen werde.

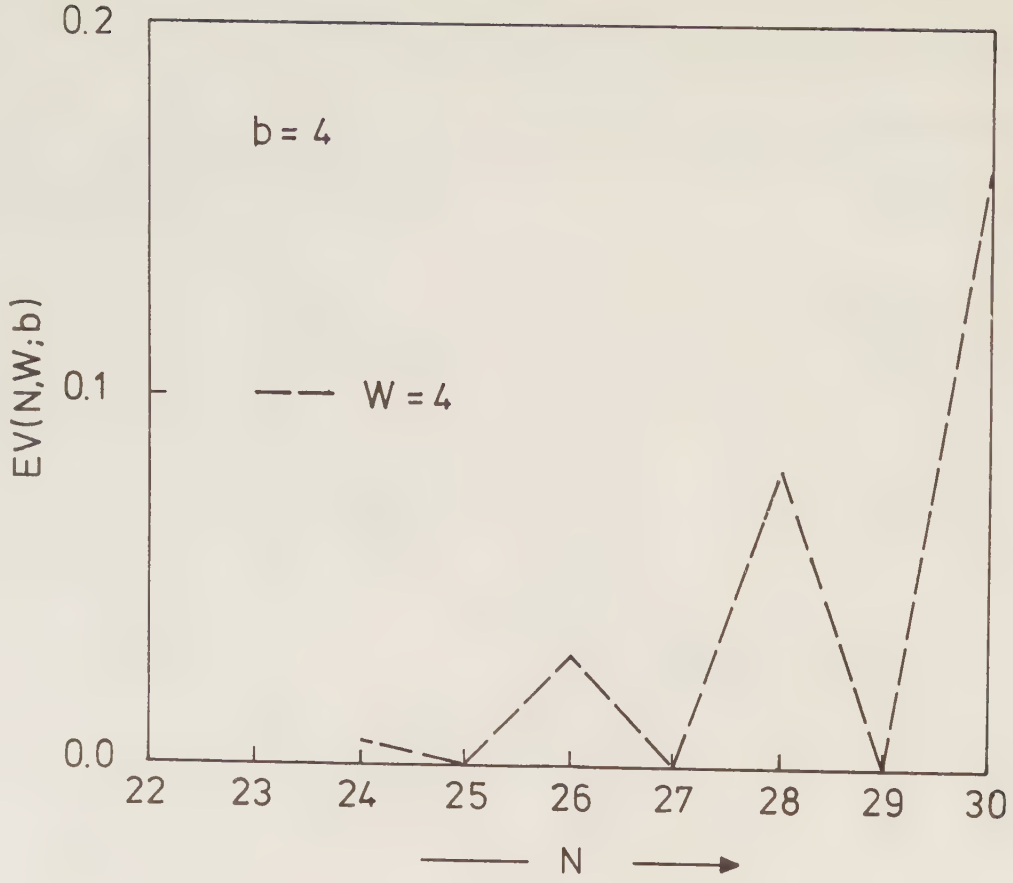
In den Figuren 3.6-b), $4 \geq b \geq 0$ sind die Normeigenwerte über der Zahl der Oszillatorquanten in der Relativbewegung für die Systeme $^{16}O + ^{12+b}X$, $4 \geq b \geq 0$ aufgetragen. Für ein gegebenes System mit dem Parameter b existieren 5 - b U(3)-Kopplungsmoden mit den Quantenzahlen $4 \geq W \geq b$. Gemäß dem einfachen Schalenmodellbild (Figur 2.1) kann der Compoundkern gebildet werden, sobald die Relativbewegung $N \geq N_{min} = 16+b$ Oszillatorquanten trägt. Aus dem Verschwinden der Normeigenwerte folgt jedoch, daß die Relativbewegung $N \geq 16 + 2b$ Oszillatorquanten zu tragen hat ; andernfalls sind sämtliche U(3)-Kanäle verboten. Das ist in genauer Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Tabelle 2.3, die für das System mit dem Parameter b eine Mindestanregung von $n = b$ Oszillatorquanten fordert. Betrachtet man ein System mit $b \leq 3$, also ein System, in dem nicht nur ein U(3)-Mod existiert (wie im Falle $^{16}O + ^{16}O$), so ist zu erkennen, daß die verschiedenen U(3)-Kopplungsmoden bei verschiedenen Quantenanregungen einsetzen.

Allgemein kann man den Figuren 3.2 - 3.6 entnehmen, daß ein U(3)-Mod W nur existiert, wenn die Relativbewegung eine Anregung von mindestens W Oszillatorquanten trägt. Ein U(3)-Mod W besitzt also eine U(3)-Barriere der Höhe $W\hbar\omega$. Die U(3)-Kanäle, die zu diesem Mod gehören, sind deshalb nur oberhalb dieser Barriere erlaubt.

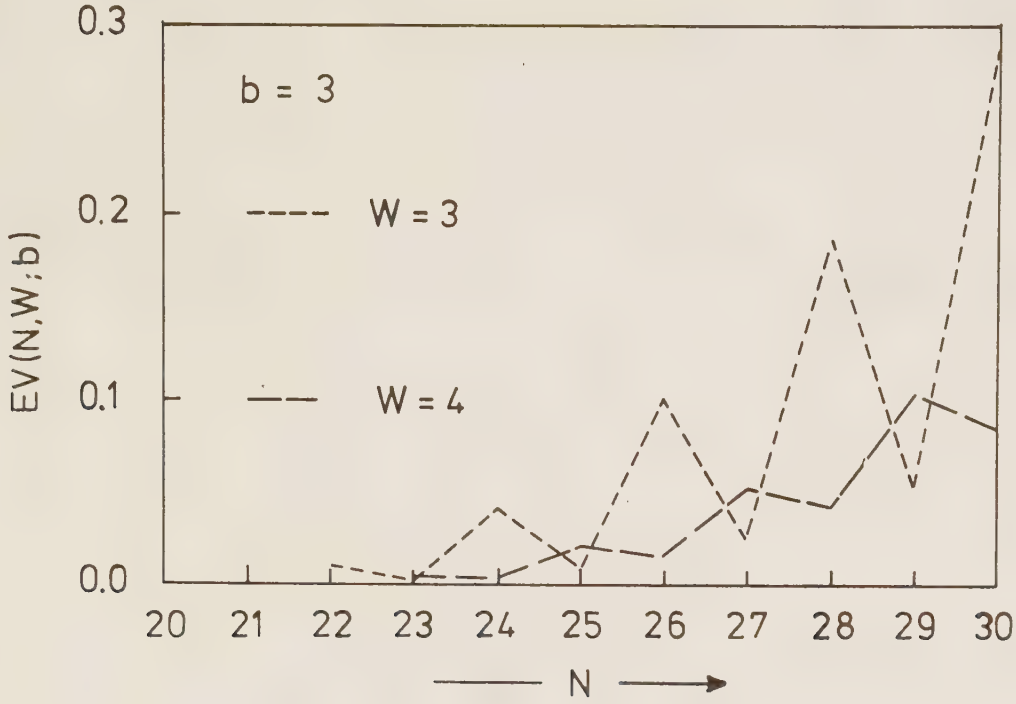
Das ist ein reiner Effekt des U(3)-Prinzips. Allerdings können diese unterschiedlich hohen U(3)-Barrieren eines Systems nicht aus der Tabelle 2.3 abgelesen werden. Diesbezüglich müßte der Beweis, der auf die Ungleichung der Regel (1) in Kapitel 2 führt, verfeinert werden. Diese Ungleichung liefert, wie schon erwähnt, nur die niedrigste von den U(3)-Barrieren , die den U(3)-Moden eines Systems eigen sind.

Damit ist die erste physikalische Bedeutung der U(3)-Kopplungsmodquantenzahl W gefunden, die bei komplexeren Systemen, bei denen offene Schalen ein Rolle spielen, besonders wichtig wird.

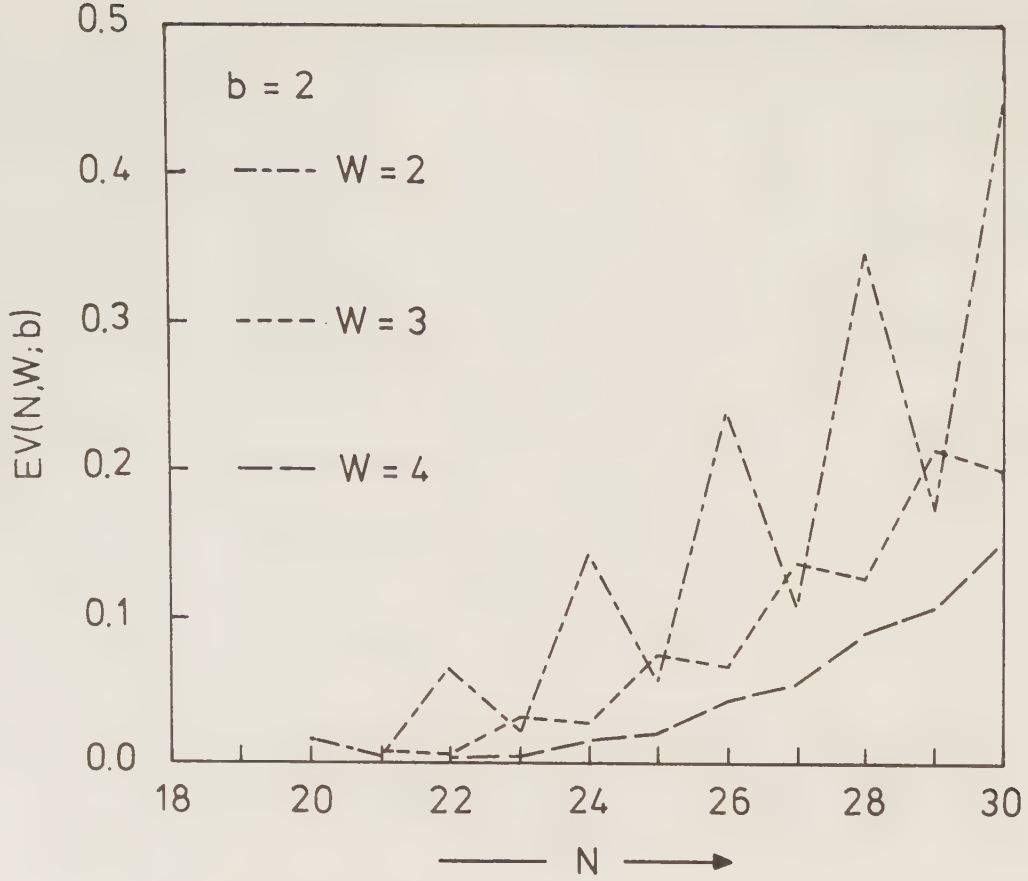
Bei Systemen mit geschlossenen Schalen ($^{16}O + ^{16}O$) gibt es nur einen U(3)-Mod und somit nur eine einzige U(3)-Barriere. Insofern ist eine Klassifizierung nach U(3)-Kopplungstypen überflüßig.



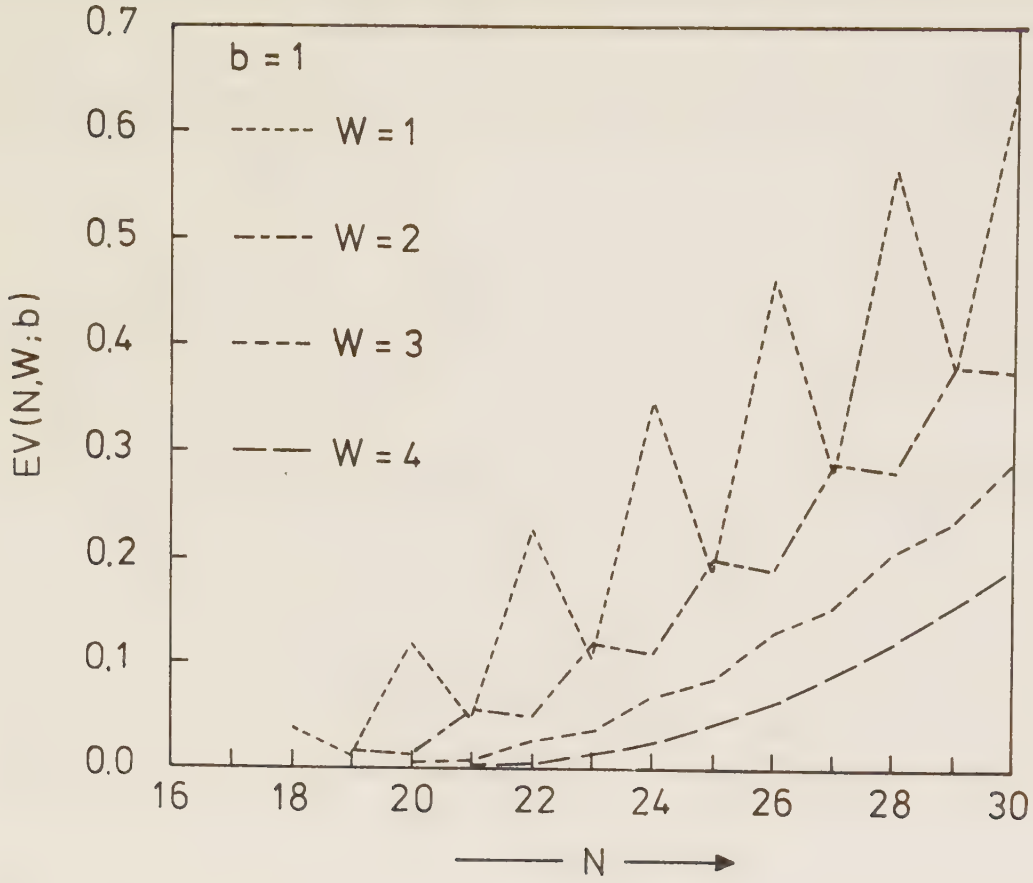
Figur 3.2
Eigenwerte EV(N, W;b) des Normoperators in Abhängigkeit der Zahl der Oszillatorquanten in der Relativbewegung. Der Parameter b (=4) charakterisiert das System $^{16}O + ^{12+b}X$. W ist die U(3)-Kopplunsmodquantenzahl.



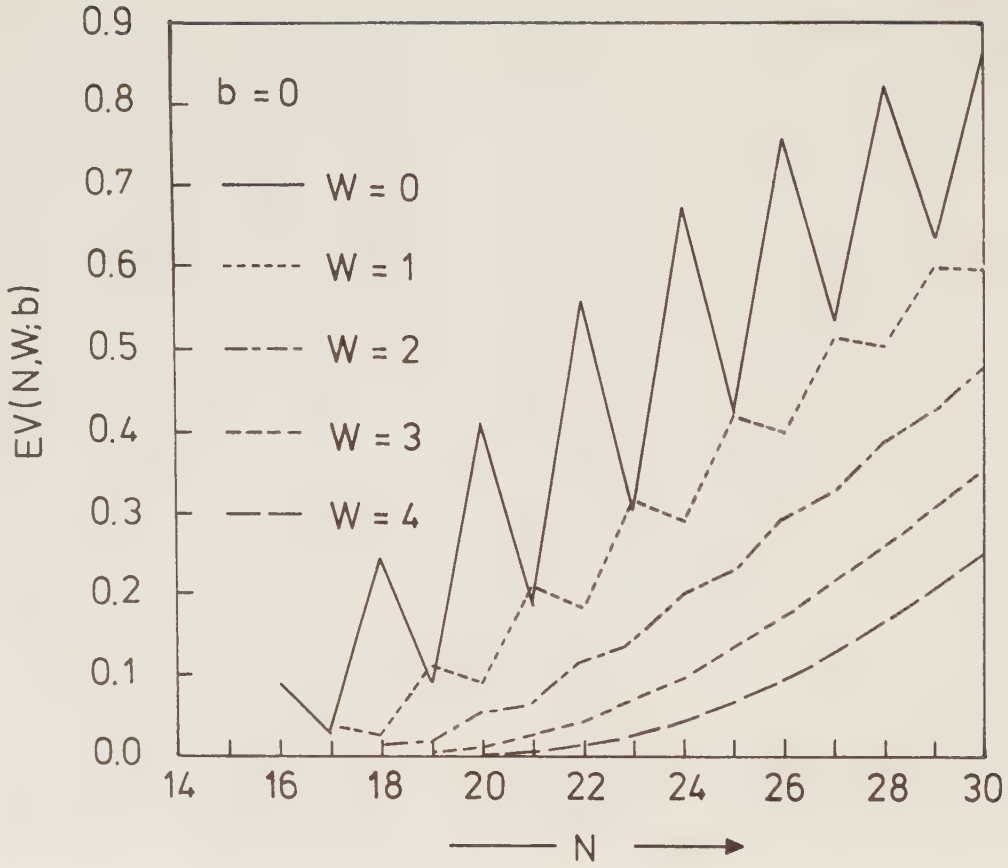
Figur 3.3
Wie Figur 3.2, jedoch mit dem Parameter b = 3.



Figur 3.4
Wie Figur 3.2, jedoch mit dem Parameter b = 2.



Figur 3.5
Wie Figur 3.2, jedoch mit dem Parameter b = 1.



Figur 3.6
Wie Figur 3.2, jedoch mit dem Parameter b = 0.

Bei der Kollision zweier Bosonen $^{16}O + ^{16}O$, die dem Parameter b = 4 entspricht, sind die Eigenwerte für ungerade Werte von N (siehe Figur 3.2) identisch Null. Dieser extreme even-odd-Effekt spiegelt das totale Verbot der negativen Paritätszustände wider. In den andern Kollisionen zeigt der U(3)-Mod W = b, der dem kompaktesten Gesamt-U(3)-Diagramm entspricht (siehe Figur 3.1), den stärksten even-odd-Effekt. Doch jetzt sind die Eigenwerte für ungerade Werte von N von Null verschieden. Für ein gegebenes b schwächt sich mit größer werdendem W der even-odd-Effekt und somit der Bosonencharakter des Systems ab. Für b = 1 bzw. b = 0 sind die Kurven, die die Moden W = 4 bzw. W = 3 und W = 4 präsentieren, fast strukturlos. Deshalb hat die Quantenzahl W eine zweite physikalische Bedeutung:

Für ein gegebenes System ist W ein Maß für den Bosonencharakter.

Im U(3)-Mod W = b+1 ≤4 hat sich der even-odd-Effekt umgekehrt. Nun sind Eigenwerte für ungerade Werte von N größer als die benachbarten. D.h. negative Paritätszustände der Relativbewegung sind begünstigt.

Die U(3)-Kopplungsmodquantenzahl ist außerdem ein Maß der Deformation; denn die Gesamt U(3)-Diagramme $[h_1 h_2 h_3]$ bestimmen die extremale Zahl der Oszillatorquanten in den drei verschiedenen Raumrichtungen. In allen betrachteten Fällen gilt $h_1 \gg h_3$ (siehe Figur 3.1), wodurch eine starke Deformation der Systeme in einer Raumrichtung angezeigt wird. Eine Streckung der Gesamt-U(3)-Diagramme mit wachsendem W entspricht einer Zunahme der Deformation.

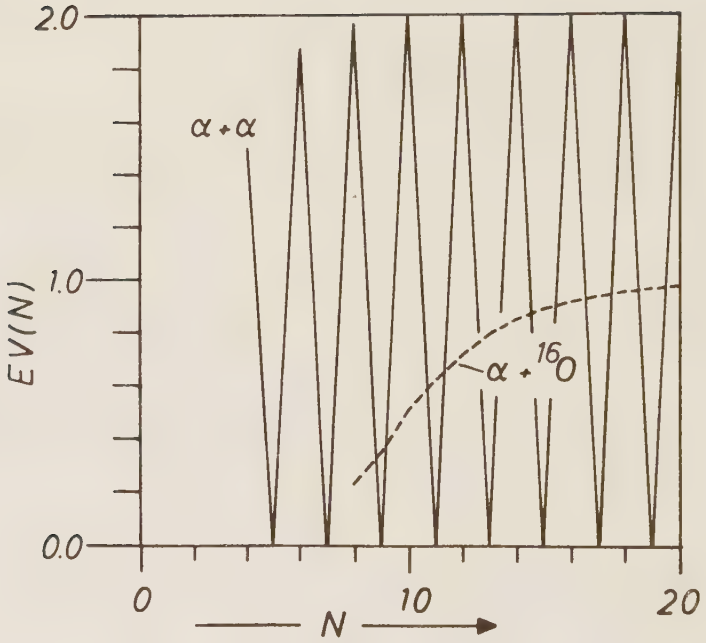
Ich möchte ganz besonders betonen, daß diese U(3)-Quantenzahlen nicht nur in den hier untersuchten Kollisionen wichtig sind. Mit ihnen läßt sich problemlos der experimentelle Befund, der vor kurzem in Darmstadt eruiert wurde, erklären [107]). Dort wurde der Compoundkern ^{156}Er bei gleicher Anregungsenergie über zwei verschiedene Eingangskanäle $^{14}C + ^{144}Sm$ und $^{64}Ni + ^{92}Zr$ erzeugt. Beim Zerfall des Compoundkerns stellten sich — im Widerspruch zur Bohr'schen Compoundkernhypothese — markante Unterschiede ein. Die Schlußfolgerung, um den experimentellen Befund erklären zu können, war, daß im Falle des Eingangskanals $^{64}Ni + ^{92}Zr$ eine Superdeformation des Compoundkerns vorliegen muß, während über den andern Eingangskanal ein relativ sphärischer Compoundkern ent-

steht.

Im U(3)-Bild ist dieser Sachverhalt sofort verständlich. Wird der Compoundkern über den Eingangskanal $^{64}Ni + {}^{92}Zr$ angesprochen, so muß die Relativbewegung eine hohe Anzahl N von Oszillatorquanten tragen. Die Relativbewegung wird also durch sehr langgestreckte, einzeilige Diagramme repräsentiert. In Anlehnung an die Figur 3.1 entstehen deshalb sehr langgestreckte Gesamt-U(3)-Diagramme. Ein sehr stark deformiertes System ist die Folge. Im Eingangskanal $^{12}C + {}^{144}Sm$ genügen schon relativ wenig Quanten in der Relativbewegung, um den Compoundkern zu erzeugen. Dementsprechend existieren auch relativ kompakte Gesamt-U(3)-Diagramme. Der Compoundkern kann daher ohne wesentliche Deformation erzeugt werden. Bei der Bildung und dem Zerfall des Compoundkerns darf die U(3)-Symmetrie nicht verletzt werden. Die extremen Unterschiede bezüglich der U(3)-Symmetrie in den beiden Eingangskanälen muß sich infolgedessen sowohl im Compoundkern, als auch in den Zerfallskanälen bemerkbar machen.

Um die Grundlage für eine Diskussion zu vervollständigen, sind in der Figur 3.7 für die Systeme $\alpha + \alpha$ und $\alpha + {}^{16}O$ die Normeigenwerte angegeben, die auch schon in der Literatur vorliegen [15, 51, 64]. Insbesondere möchte ich auf die Unterschiede hinweisen, die beim Vergleich mit der Figur 3.2 ins Auge fallen. Für das System $^{16}O + {}^{16}O$ treten oberhalb der U(3)-Barriere ($4\hbar\omega$) fast verbotene Zustände auf. Erst allmählich werden die Eigenwerte größer und die zugehörigen Zustände "erlaubter". Für N gegen ∞ streben die Eigenwerte gegen 2.

Eine U(3)-Barriere tritt weder bei $\alpha + \alpha$ noch bei $\alpha + {}^{16}O$ auf. Die nicht verschwindenden Eigenwerte für $\alpha + \alpha$ liegen zwischen 1 und 2. Es gibt also keine Unterschiede um Größenordnungen, wie das bei $^{16}O + {}^{16}O$ zu beobachten ist. Wie sich diese Unterschiede bei quasigebundenen Rechnungen auswirken, möchte ich im nächsten Abschnitt veranschaulichen.



Figur 3.7

Normeigenwerte EV(N) für die Systeme

α + α und α + ^{16}O

3.2 Ein Vergleich der Ergebnisse quasigebundener Rechnungen für die Systeme $\alpha+\alpha$ und $^{16}O + ^{16}O$

Bei Streurechnungen oder quasigebundenen Rechnungen müssen die beiden in der Gleichung (2) auftretenden Integralkerne explizit bekannt sein. Sofern die Betrachtungen auf Binärsysteme mit Fragmenten geschlossener Schalen eingeschränkt werden, läßt sich die allgemeine Form dieser Integralkerne sehr einfach wiedergeben. Das sollte aber nicht über die Schwierigkeit, diese Kerne explizit zu berechnen, hinwegtäuschen ; denn es sind gerade diese Kerne, die eine Untersuchung komplexerer Systeme äußerst kompliziert werden lassen. Deshalb sind effektive Methoden erforderlich, diese Kerne zu berechnen. Die meiner Meinung nach weitaus wirkungsvollste wird im Kapitel 4 im Detail vorgestellt.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist der Normkern ein U(3)-Skalar ,

$$\mathcal{N}(\vec{s}_1, s_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \frac{(\vec{s}_1 \cdot s_1^*)^\nu}{\nu!} \tag{3}$$

und der Wechselwirkungsintegralkern für z.B. Coulomb, Brink-Boeker[107]) Volkov[108]) Wechselwirkungen und den kinetischen Energieoperator ein O(3)-Skalar ,

$$\mathcal{H}(\vec{s}_1, s_1) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=0}^{\infty} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} \frac{(\vec{s}_1\vec{s}_1)^{\nu_1}}{\nu_1!} \frac{(\vec{s}_1 \cdot s_1^*)^{\nu_2}}{\nu_2!} \frac{(s_1^* s_1^*)^{\nu_3}}{\nu_3!} \tag{4}$$

Die Entwicklungskoeffizienten b_ν sind die Eigenwerte des Normoperators und in $a_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ steckt die Information über die Wechselwirkung. Die im Kapitel 4 vorgestellte Methode führt nicht direkt auf diese Polynomgestalt der Kerne, sondern produziert — was viel wichtiger ist — geschlossene , analytische Ausdrücke. Deshalb kann zum Beispiel die Methode der Dequantisierung auch auf komplexere Systeme ausgedehnt werden, da auf die benötigten geschlossenen Ausdrücke zurückgegriffen werden kann.

Eine Drehimpulsprojektion ist ausgehend von den Gleichungen (3) und (4) leicht durchzuführen. Zu berücksichtigen ist lediglich, daß

$$\frac{(\bar{s}_1\cdot\bar{s}_1)^{\nu_1}}{\nu_1!}\,\frac{(\bar{s}_1\cdot s_1^*)^{\nu_2}}{\nu_2!}\,\frac{(s_1^*\cdot s_1^*)^{\nu_3}}{\nu_3!} = \sum_{\substack{L,M\\ 0\leq \nu_2-L=\text{even}}} \alpha_{\nu_1\nu_2\nu_3,L}\; P_{LM}^{2\nu_1+\nu_2}(\bar{s}_1)\; P_{LM}^{2\nu_3+\nu_2}(s_1)^*\,, \tag{5}$$

$$\alpha_{\nu_1\nu_2\nu_3,L} := \frac{A_{\nu_2 L}^2}{A_{2\nu_1+\nu_2 L}\; A_{2\nu_3+\nu_2 L}\quad \nu_1!\;\nu_3!}\,,$$

$$A_{\mu L} := (-1)^{\frac{\mu-L}{2}}\sqrt{\frac{4\pi}{(\mu+L+1)!!\;(N-L)!!}}\,,$$

$$P_{LM}^{\mu}(x) := A_{\mu L}\,(x\cdot x)^{\frac{\mu-L}{2}}\,Y_{LM}(x) \equiv (x\,|\,\mu LM)$$

gilt . Daraus folgt

$$\mathcal{N}(\bar{s}_1,s_1) \equiv (\bar{s}_1|\,\mathcal{N}\,|s_1) = \tag{6}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\substack{L,M\\ 0\leq \nu-L=\text{even}}} b_\nu\,(\bar{s}_1|\,\nu LM)\,(\nu LM\,|s_1)\,,$$

$$\mathcal{H}(\bar{s}_1,s_1) \equiv (\bar{s}_1|\,\mathcal{H}\,|s_1) = \tag{7}$$

$$\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=0}^{\infty}\sum_{\substack{L,M\\ 0\leq \nu_2-L=\text{even}}} C_{\nu_1\nu_2\nu_3,L}\;\;(\bar{s}_1|2\nu_1+\nu_2\,LM)\;(2\nu_3+\nu_2\,LM\,|s_1)\,,$$

$$C_{\nu_1\nu_2\nu_3,L} := \alpha_{\nu_1\nu_2\nu_3}\;\alpha_{\nu_1\nu_2\nu_3,L}$$

bzw.

$$(\tilde{N}\tilde{L}\tilde{M}|\mathcal{N}|NLM) = b_N \, \delta_{\tilde{N}N} \, \delta_{\tilde{L}L} \, \delta_{\tilde{M}M} \quad , \tag{8}$$

$$(\tilde{N}\tilde{L}\tilde{M}|\mathcal{H}|NLM) = (\tilde{N}L|\mathcal{H}|NL) \, \delta_{\tilde{L}L} \, \delta_{\tilde{M}M} \quad , \tag{9}$$

$$(\tilde{N}L|\mathcal{H}|NL) := \sum_{\substack{v_2=0 \\ 0 \le v_2 - L = \text{even}}}^{\min\{\tilde{N},N\}} C_{\frac{\tilde{N}-v_2}{2} \, v_2 \, \frac{N-v_2}{2}, L} \quad .$$

Wird die Gleichung (2) in der NLM - Basis formuliert

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{L,M \\ 0 \le N-L = \text{even}}} \left\{ (\tilde{N}\tilde{L}\tilde{M}|\mathcal{H}|NLM) - E(\tilde{N}\tilde{L}\tilde{M}|\mathcal{N}|NLM) \right\} (NLM|u) = 0 \quad , \tag{10}$$

führt das Einsetzen der Beziehungen (8) und (9) auf das allgemeine EWP

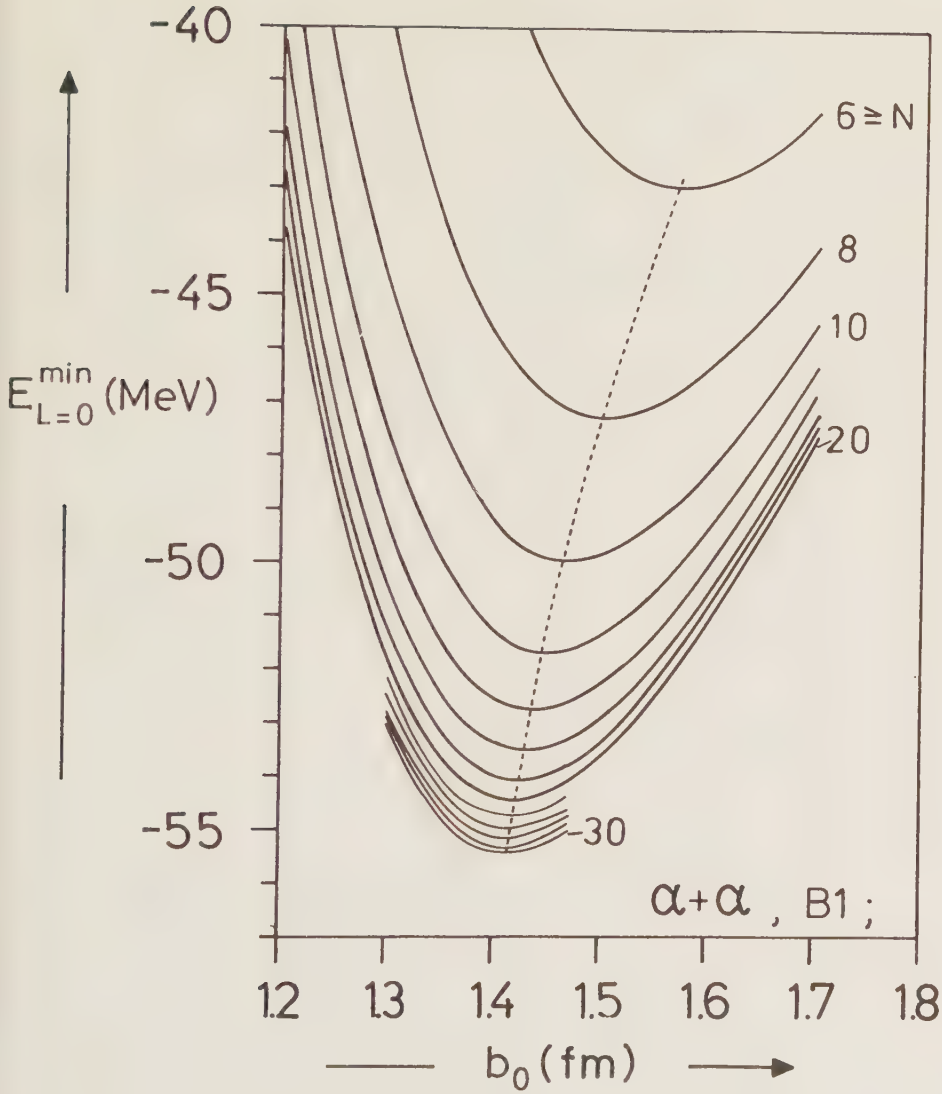
$$\sum_{N=0}^{\infty} \left\{ (\tilde{N}\tilde{L}|\mathcal{H}|N\tilde{L}) - E \, b_N \, \delta_{\tilde{N}N} \right\} (N\tilde{L}\tilde{M}|u) = 0 \quad . \tag{11}$$

Die Lösungen sind nur von $\tilde{L}$ nicht aber von $\tilde{M}$ abhängig. Um dieses unendliche Gleichungssystem zu lösen, wird die NLM-Basis abgeschnitten, so daß ein endliches Gleichungssystem resultiert. Die Lösungen werden innerhalb des vorgegebenen Modellraumes gesucht. Selbverständlich ist dieses Vorgehen willkürlich und ein Hinweis darauf, daß bei Vergrößerung des Modellraumes die Ergebnisse stabil bleiben, nicht zutreffend. In der Tat läßt sich bei der Vorgabe eines genügend großen Modellraumes ein Energiespektrum produzieren, das Sich "für das Auge" bei Vergrößerung des Modellraumes unwesentlich ändert. Tatsache bleibt aber, daß für N gegen ∞ das Spektrum total entartet und als Lösung ergibt sich die energetische Lage der Eingangskanalschwelle.

Aus dem geschilderten Grund ist es wünschenswert, das Abschneiden zu kontrollieren. Zu diesem Zweck fasse ich die Modellraumgröße N_{max} als diskreten Parameter auf. In quantenmechanischen Rechnungen kommt die

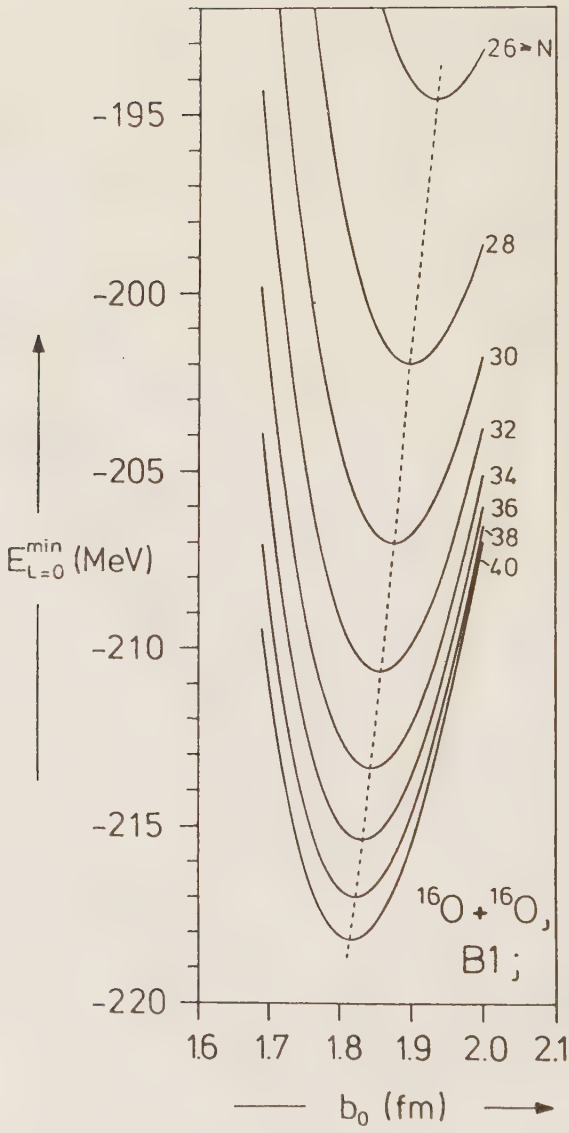
harmonische Oszillatorlänge $b_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ noch als zweiter kontinuierlicher Parameter hinzu. Das Ziel besteht nun darin, b_0 als Variationsparameter zu interpretieren, ihn also in jedem Modellraum so zu bestimmen, daß die Energie $E^{min}_{L=0}$ des am tiefsten liegenden L=0 Zustandes minimal wird. Dies ist in den Figuren 3.8 und 3.9 für $\alpha+\alpha$ bzw. $^{16}O + {}^{16}O$ illustriert. Eine Kurve gibt in dem durch den Index N_{max} angegebenen Modellraum die energetische Lage $E^{min}_{L=0}$ dieses tiefsten L = 0 Zustandes in Abhängigkeit von b_0 an. Für die Brink-Boeker Kraft B1 (einschließlich kinetischer Energie) wurden die Modellräume für $\alpha + \alpha$ bis $N_{max} = 30$ und für $^{16}O + {}^{16}O$ bis $N_{max} = 40$ untersucht. Die gestrichelte Kurve ist der geometrische Ort der gesuchten Minima. Diese Minima, denen ein Wertepaar $(N_{max}, b_{0_{min}})$ zugeordnet werden kann, werden in den Figuren 3.10 und 3.11 durch die Kurven $b_{0_{min}}$ repräsentiert.

Gleichzeitig verlange ich, daß in jedem Modellraum der Parameter b_0 so zu bestimmen ist, daß die experimentellen Daten optimal reproduziert werden. Dies führt über einen Fit der kleinsten quadratischen Abweichung auf den von N_{max} abhängigen Parameter $b_{0_{bf}}$ bzw. auf die entsprechenden Kurven in den Figuren 3.10 und 3.11. (Für $\alpha + \alpha$ gingen die Zustände L= 0, 2, 4 in den Fit ein. Für $^{16}O + {}^{16}O$ wurden nur die Zustände L = 14, 16, . . .24 herangezogen, da hierzu die zuverlässigsten Daten vorliegen.) Die zweite Forderung ist ganz natürlich ; denn die Schlüsse, die aus den Rechnungen gezogen werden , sollten dann am zutreffendsten sein, wenn die bestmögliche Reproduktion der experimentellen Daten gewährleistet ist. Beiden Forderungen ist dann Genüge getan, wenn die Parameter aus dem Bereich des kleinsten Abstandes (im Falle $\alpha + \alpha$) bzw. aus dem Schnittbereich (im Falle $^{16}O + {}^{16}O$) der beiden Kurven gewählt werden. Für $\alpha+\alpha$ findet man auf diese Weise den Modellraum $N_{max} = 10$ und den Parameter $b_{0_{min}} = 1.46$ fm ($b_{0_{bf}} = 1.43$ fm). Zur Beschreibung der Kollision $^{16}O + {}^{16}O$ sollte entweder der Modellraum $N_{max} = 30$ mit dem Parameter $b_{0_{min}} = 1.88$ fm ($b_{0_{bf}} = 1.85$ fm) oder der Modellraum $N_{max} = 32$ mit dem Parameter $b_{0_{min}} = 1.86$ fm ($b_{0_{bf}} = 1.9$ fm) gewählt werden.



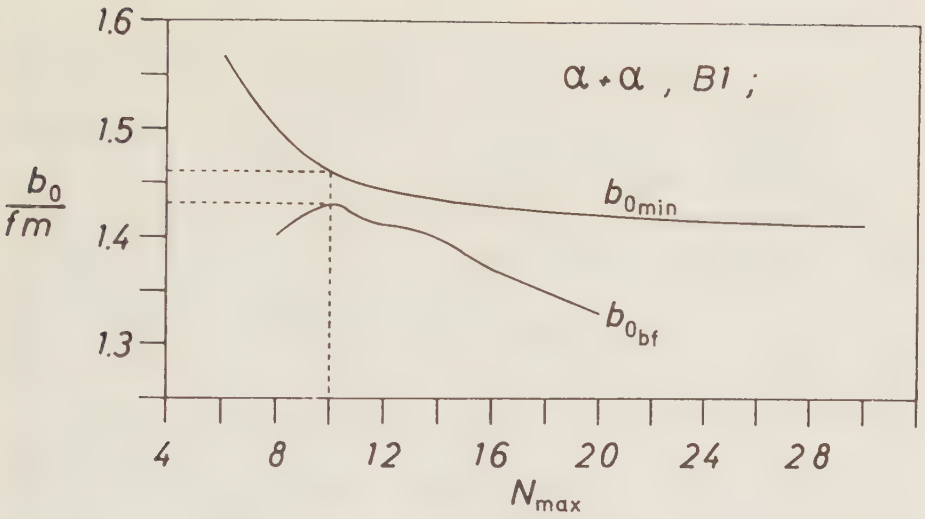
Figur 3.8

Für α + α und die Brink-Boeker Kraft B1 wird die Bindungsenergie $E^{min}_{L=0}$ des tiefsten L = 0 Zustandes in Abhängigkeit vom Oszillatorparameter b_0 und vom Modellraum $N \leq N_{max}$ dargestellt.



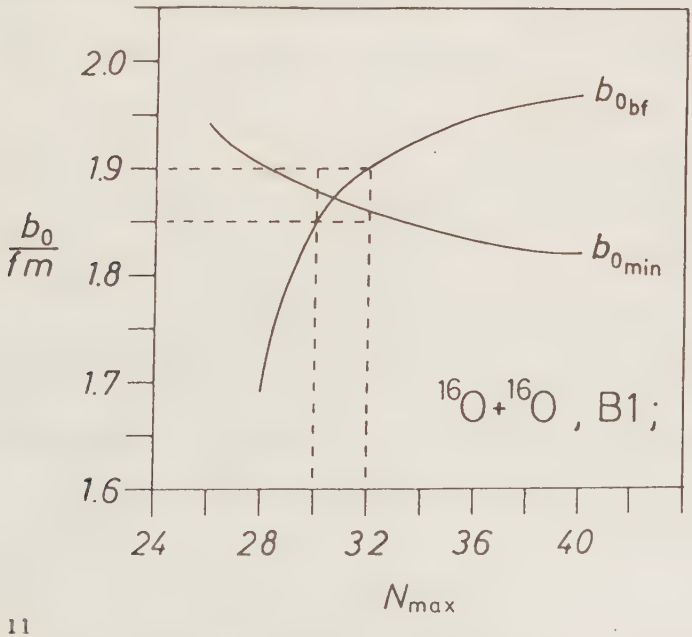
Figur 3.9

Das Pendant zur Figur 3.8 für das System $^{16}O + ^{16}O$



Figur 3.10

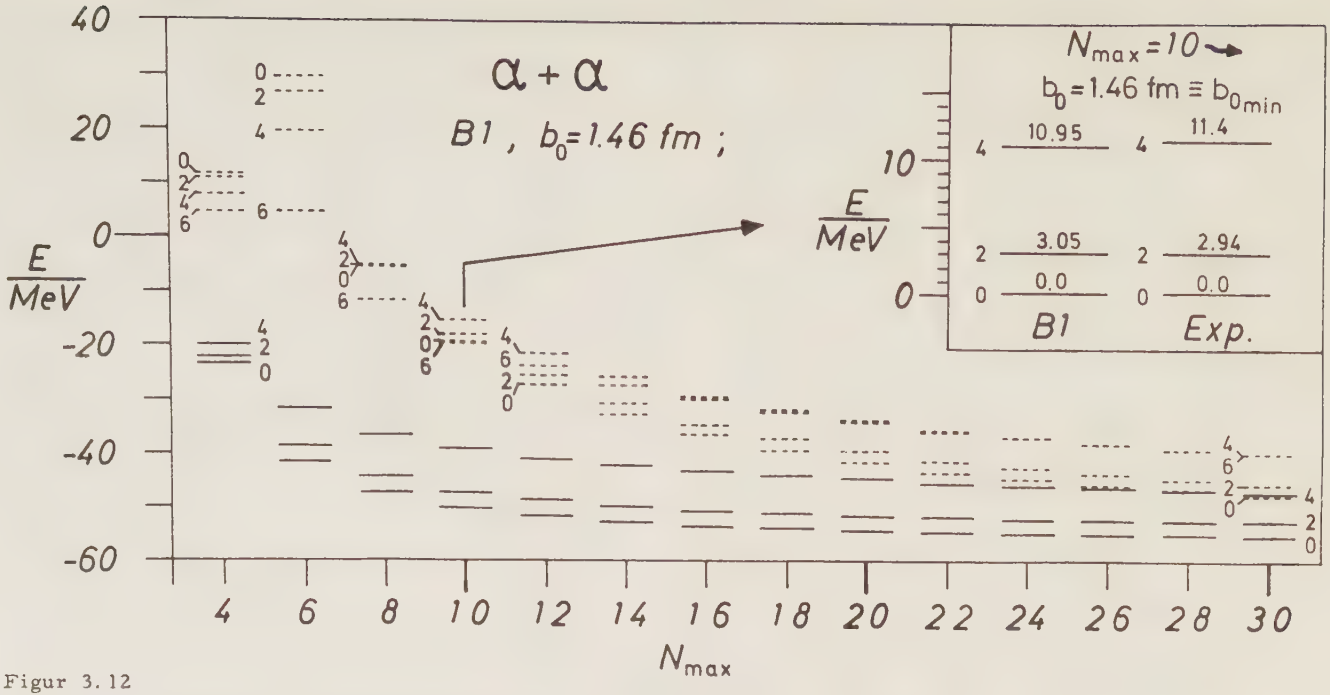
Die Festlegung des Modellraumes und des Oszillatorparameters für α + α und die Wechselwirkung B1



Figur 3.11

Eine zur Figur 3.10 analoge Betrachtung für die Kollision $^{16}O + ^{16}O$

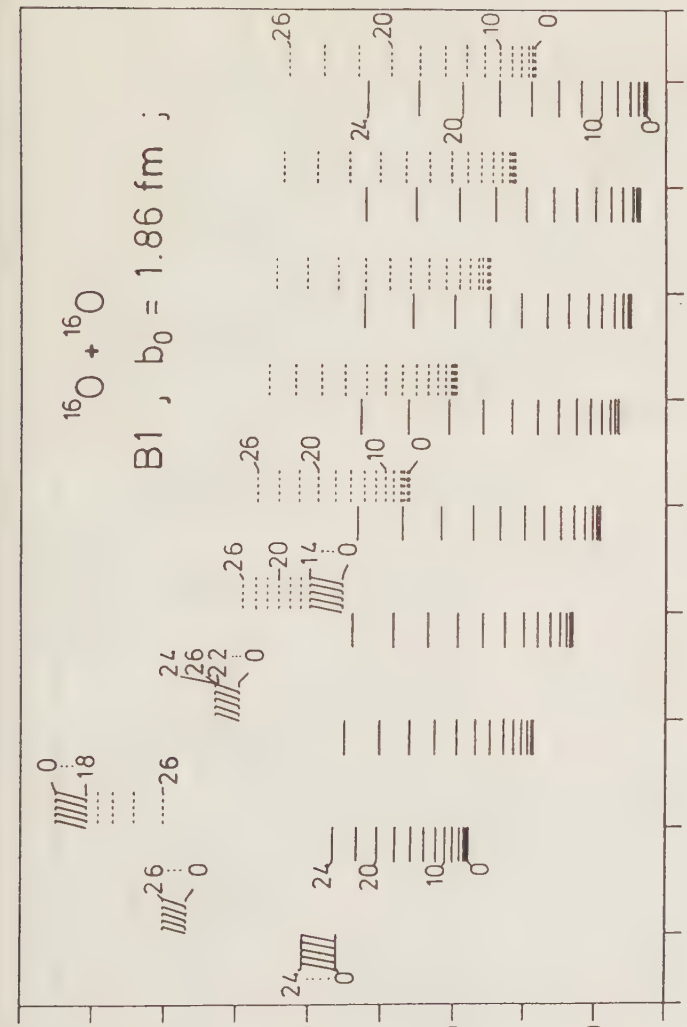
In der Figur 3.12 ist für $\alpha+\alpha$ bei zugrundelegen der Brink-Boeker Kraft B1 und des Parameters $b_0 = 1.46$ fm die Modellraumabhängigkeit des Spektrums zu verfolgen. Wiedergegeben sind nur die beiden niedrigsten Sequenzen $L = 0, 2, 4$ (durchgezogene Linien) und $L = 0, 2, 4, 6$ (gestrichelte Linien). Die niedrigste Sequenz zeigt schon im Modellraum $N_{max} = 6$ eine Aufspaltung, die der experimentellen nahekommt. Bis $N_{max} = 10$ verstärkt sich die Aufspaltung, um dann mit wachsendem N_{max} kontinuierlich abzunehmen. Eine kompliziertere Modellraumabhängigkeit zeigt die zweite Sequenz. Hier treten stärkere Änderungen in der Niveauaufspaltung auf. Vor allem sind Umordnungen in der Drehimpulsabfolge zu beobachten. Erst in den Modellräumen $12 \leq N_{max} \leq 30$ ist die Drehimpulsabfolge stabil. Vermutlich schiebt sich aber noch das $L = 6$ Niveau über das $L = 4$ Niveau hinweg, wenn der Modellraum weiter ausgedehnt wird. Auffallend ist auch die relative Lage der zweiten Sequenz zur ersten. Zunächst ist die zweite Sequenz in kleineren Modellräumen deutlich von der ersten Sequenz abgesetzt. Doch bereits im Modellraum $N_{max} = 30$ hat sich die zweite Sequenz in die erste hineingeschoben. Insgesamt erahnt man schon den Trend, daß all diese Niveaus für N gegen ∞ asymptotisch der Eingangskanalschwelle zustreben. Dem über die bereits geschilderte Methode ermittelten Parameterpaar $N_{max} = 10$ und $b_{0min} = 1.46$ fm entspricht ein spezieller Ausschnitt der Figur 3.12. Dieser wird vergrößert im Inset wiedergegeben und mit der Grundzustandsbande von ^{8}Be verglichen (Daten zu ^{8}Be sind z.B. in den Referenzen [110-112]) zu finden). Eine noch bessere Übereinstimmung könnte erzielt werden, wenn anstelle von $b_{0min} = 1.46$ fm der Parameter $b_{0bf} = 1.43$ fm gewählt würde. Allerdings begibt man sich dann etwas aus dem Minimum der Kurve $N_{max} = 10$ der Figur 3.8. Auf einen Vergleich der zweiten Sequenz mit experimentellen Daten wird verzichtet, da ein solcher Vergleich meiner Meinung nach keine Aussagekraft besitzen kann. Zur Reproduktion höherliegender Rotationsbanden in ^{8}Be dürfte eine Brink-Boeker (oder Volkov) Kraft hoffnungslos überfordert sein.



Figur 3.12

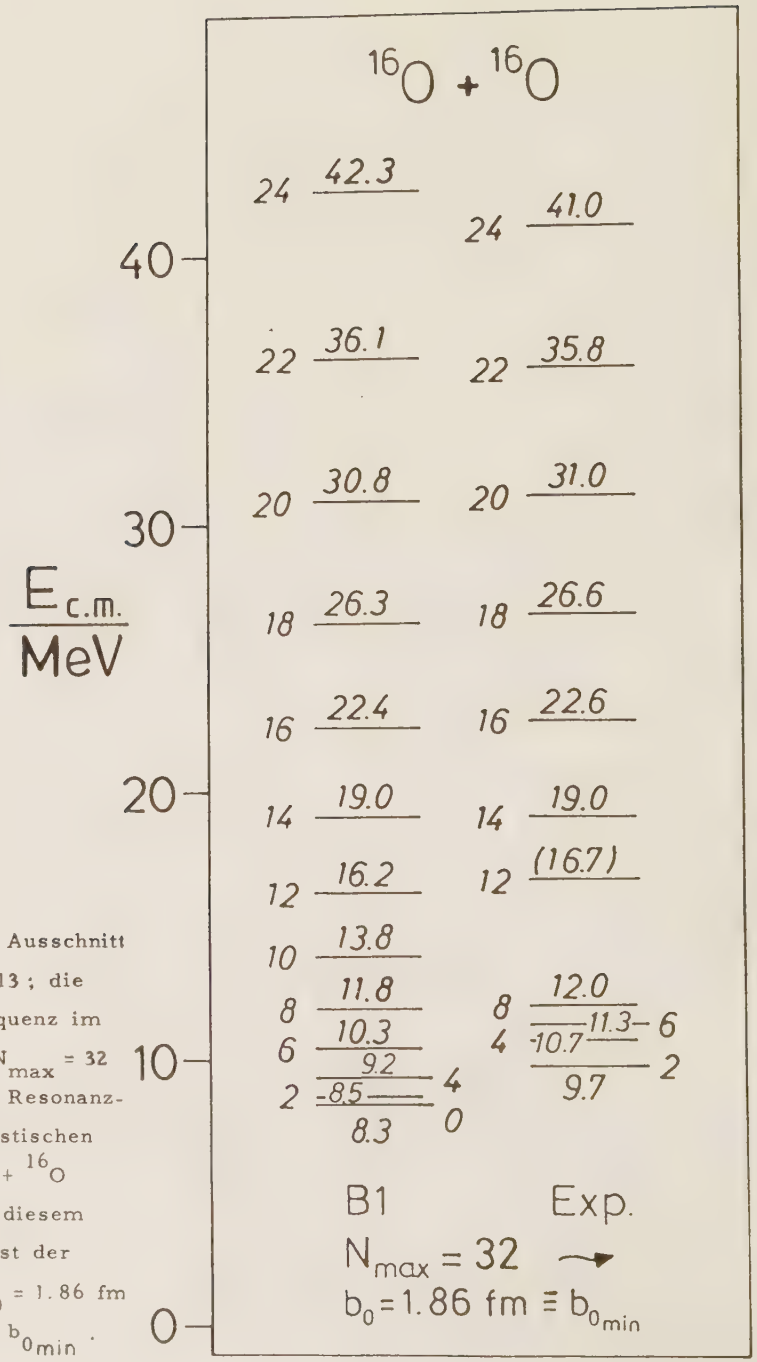
Für α + α , die Kraft B1 und den Parameter b_0 = 1.46 fm wird die Modellraumabhängigkeit des Spektrums untersucht. Wiedergegeben sind nur die beiden niedrigsten Sequenzen. Im Inset wird im vergrößerten Maßstab die niedrigste Sequenz des Modellraumes N_{max} = 10 mit der Grundzustandsbande von ^{8}Be verglichen. Für diesen Modellraum ist der Parameter b_0 = 1.46 fm identisch mit b_{0min} .

In der Figur 3.13 wird für $^{16}O + ^{16}O$ eine analoge Betrachtung angestellt. Die Kraft ist wiederum B1 und als Parameter wurde $b_0 = 1.86$ fm gewählt. Wie zuvor ist nur für die ersten beiden Sequenzen $L = 0, 2, \ldots 24$ (durchgezogene Linien) und $L = 0, 2, \ldots 26$ (gestrichelte Linien) die Modellraumabhängigkeit dargestellt. Zu erkennen ist, daß in der ersten Sequenz die energetische Aufspaltung kontinuierlich mit N_{max} zunimmt. Sie erreicht ihr Maximum erst für ein $N_{max} > 40$. Bei noch weiterer Ausdehnung des Modellraumes nimmt die Aufspaltung wieder ab und die Niveaus tendieren in ihrer Lage der Eingangskanalschwelle zu. Im Gegensatz zu $\alpha + \alpha$ geht also die spektrale Aufspaltung bei stetiger Vergrößerung des Modellraumes viel langsamer vonstatten. Auf diesen Punkt werde ich nochmals zurückkommen.
Die Drehimpulsabfolge bleibt in der ersten Sequenz unverändert, während sie sich in der zweiten Sequenz erst für ein $N_{max} \geq 30$ stabilisiert. Außerdem schiebt sich diese zweite Sequenz mit größer werdenden Modellräumen immer mehr in die erste Sequenz hinein. Die Ineinanderschiebung der Sequenzen in Abhängigkeit von N_{max} ist für $^{16}O + ^{16}O$ erheblich stärker ausgeprägt als im System $\alpha + \alpha$. Auch hierauf werde ich nochmals zurückkommen.
Ein spezieller Ausschnitt der Figur 3.13, der dem Parameterpaar $N_{max} = 32$, $b_{0min} = 1.86$ fm entspricht, ist in der Figur 3.14 vergrößert dargestellt. Zum Vergleich sind die experimentell beobachteten Resonanzen aus der elastischen $^{16}O + ^{16}O$ Streuung aufgetragen [98-101, 113, 114]. Die Lage 16.7 MeV der $L = 12$ Resonanz wurde aus der Anregungsfunktion extrapoliert. Diese Extrapolation stützt sich auf die systematische Änderung des Drehimpulses mit der Energie und auf das Ergebnis [92, 115, 116], daß die Täler der elastischen Anregungsfunktion den Lagen der Resonanzen entsprechen. Auf diesem Weg läßt sich ableiten, wo die energetische Lage der Resonanz $L = 12$ zu erwarten ist. Die Resonanzen $L = 0$ und $L = 10$ wurden bisher in elastischen Streuexperimenten noch nicht identifiziert.
Der in der Figur 3.14 angestellte Vergleich zeigt, daß die Vorhersagen mit einer Brink-Boeker Kraft B1 überraschend gut sind. Zu beachten ist, daß in der Figur 3.14 eine $E_{c.m.}$-Skala angegeben ist. Der $L = 0$ Zustand der berechneten Sequenz liegt 24.8 MeV über dem Grundzustand des Compound-



Figur 3.13

Modellraumabhängigkeit der Resonanzen im System $^{16}O + ^{16}O$, basierend auf der Kraft B1 und dem Parameter b_0 = 1.86 fm. Wiedergegeben sind nur die beiden niedrigsten Sequenzen.



Figur 3.14
Vergrößerter Ausschnitt der Figur 3.13; die niedrigste Sequenz im Modellraum $N_{max} = 32$ wird mit den Resonanzen in der elastischen Streuung $^{16}O + ^{16}O$ verglichen. In diesem Modellraum ist der Parameter $b_0 = 1.86$ fm identisch mit b_{0min}.

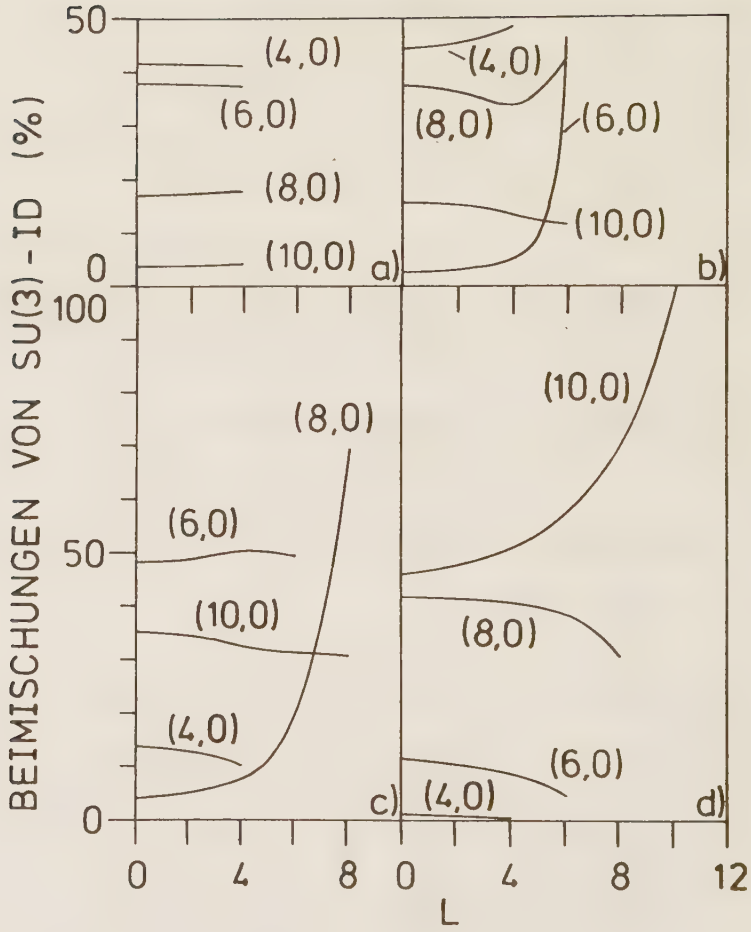
kerns ^{32}S (vgl. Figur 2.4). Beim System $\alpha + \alpha$ reproduzierte die berechnete Sequenz die Grundzustandsbande des Compoundkerns ^{8}Be.

Ich möchte jetzt wieder zurückkommen auf die bei der Diskussion der Normeigenwerte festgestellte Tatsache, daß im Gegensatz zum System $\alpha + \alpha$ in der Kollision $^{16}O + ^{16}O$ fast verbotene U(3)-Kanäle auftreten. Welche Auswirkungen hat dieser Unterschied ? Zur Klärung dieser Frage, scheint es vorteilhaft zu sein, zu untersuchen, wie stark verschiedene U(3)-Kanäle an einer Resonanz beteiligt sind.
Zuvor bedarf es aber einer Bemerkung. Das Gleichungssystem (11) stellt ein allgemeines Eigenwertproblem dar. Deshalb sind i.a. die Eigenvektoren nicht orthogonal. Trotzdem kann eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation durchgeführt werden, sofern das allgemeine EWP in ein EWP

$$\sum_{N}^{\infty} \left\{ \frac{(\bar{N}\bar{L}|\mathcal{H}|NL)}{\sqrt{b_{\bar{N}}}\sqrt{b_N}} - E\,\delta_{\bar{N}N} \right\} \left(\sqrt{b_N}\,(NLM|u) \right) = 0 \qquad (12)$$

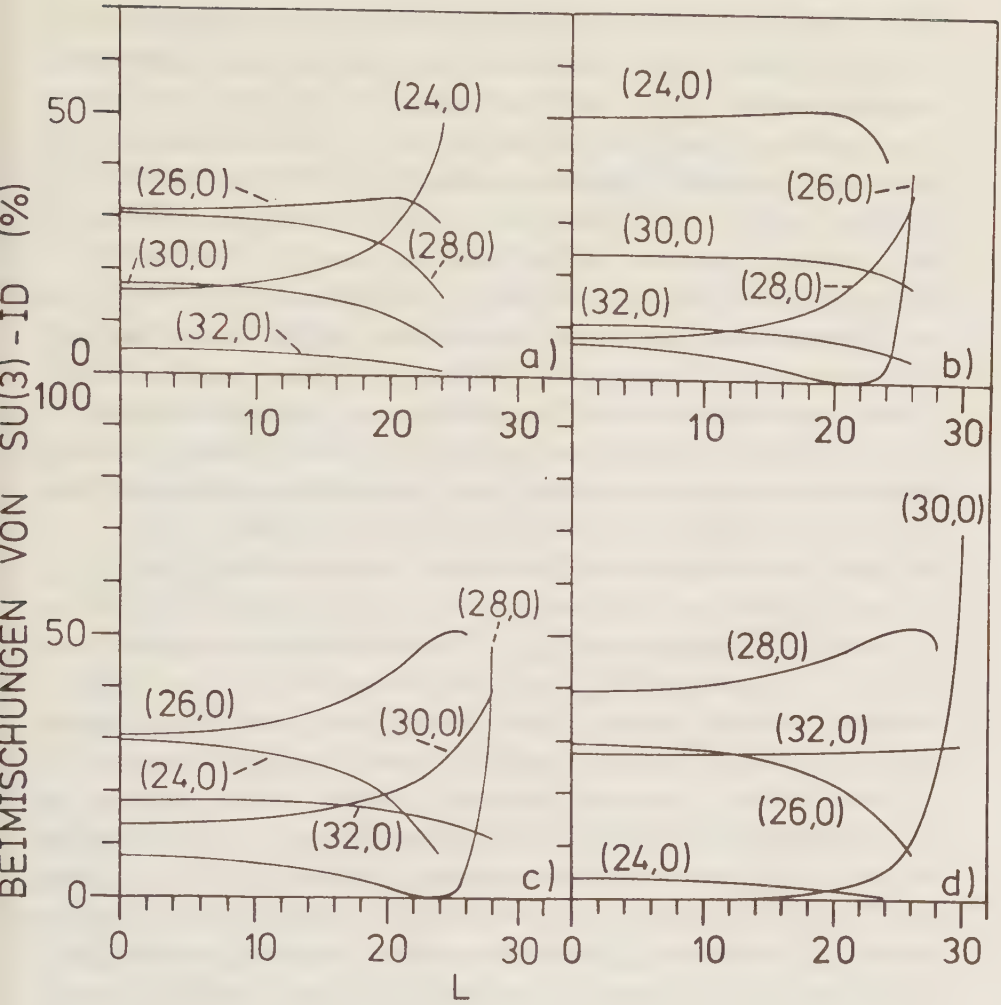
übergeführt wird. Die N-Summation erstreckt sich dabei nur über die erlaubten U(3)-Kanäle. Für diese gilt $b_N \neq 0$. Die neuen Eigenvektoren, die durch Multiplikation mit der Wurzel der Norm aus jenen der Gleichung (11) hervorgehen, sind jetzt orthogonal.

Die folgenden Untersuchungen, die auf den orthonormierten Eigenvektoren der Gleichung (12) beruhen, wurden für $\alpha + \alpha$ bzw. $^{16}O + ^{16}O$ in den Modellräumen und mit den Parametern durchgeführt, die dem Input der Figur 3.12 bzw. der Figur 3.14 zugrundeliegen. Der für $\alpha + \alpha$ gewählte Modellraum $N_{max} = 10$ wird von vier U(3)-Kanälen bzw. vier SU(3)-ID (N, 0), N = 4, 6, 8, 10 aufgespannt. Es gibt deshalb auch vier verschiedene Drehimpulssequenzen L = 0, 2, . . . N . Nur wenn die SU(3)-ID nicht mischen, ist in der Sequenz L = 0, 2, . . . N die Darstellung (N,0) mit 100% repräsentiert. Im allgemeinen können aber zu einem Zustand mit dem Drehimpuls L verschiedene SU(3)-ID (N, 0) beimischen. Die einzige Bedingung ist $N \geq L$. Für die Sequenzen 1-4 werden in den Figuren 3.15 a)-d) die prozentuale Beimischungen von SU(3)-ID analysiert. Die Bedeutung der Figuren 3.15 b)-d) sollte nicht überbewertet werden. Wie bereits erwähnt wurde, darf nicht erwartet werden, daß für eine Brink-Boeker Kraft Schlußfolgerungen, die aus der Unter-



Figur 3.15 a) - d)

Für $\alpha + \alpha$, die Kraft B1 und $b_0 = 1.46$ fm $\equiv b_{0_{min}}$ werden die Beimischungen von SU(3)-ID in den Zuständen der Sequenzen 1 - 4, die den Modellraum $N_{max} = 10$ aufspannen, angegeben. Die Figur 3.15 a) ist eine Analyse der Zustände L = 0, 2, 4, die im Inset der Figur 3.12 hervorgehoben sind.



Figur 3.16 a) - d)
Für $^{16}O + ^{16}O$, die Kraft B1 und $b_0 = 1.86$ fm $\equiv b_{0min}$ werden die Beimischungen von SU(3)-ID untersucht. Im Modellraum $N_{max} = 32$ liegen fünf Sequenzen vor. Nur die Zustände der Sequenzen 1 - 4 werden in den Figuren a) - d) analysiert. Die Figur 3.16 a) gibt die Charakteristik der Zustände der Figur 3.14 an.

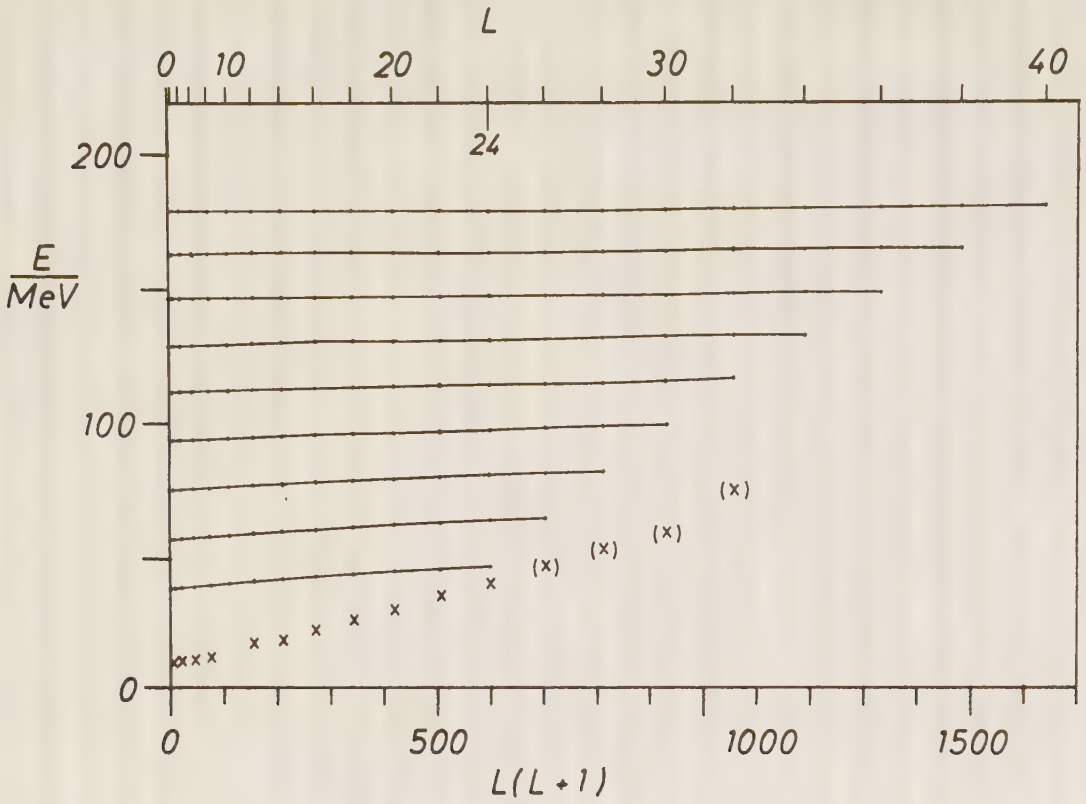
suchung höherer Sequenzen resultieren, physikalisch relevant sind. Ich beschränke aus diesem Grund die Diskussion auf die energetisch niedrigste Drehimpulssequenz (L = 0, 2, 4), die bereits im Inset der Figur 3.12 mit der Grundzustandsbande von ^{8}Be verglichen wurde. Die Analyse (Figur 3.15 a)) zeigt, daß in allen drei Zuständen die Darstellung (4, 0) dominierend ist. Außerdem ist eine starke Beimischung der (6, 0)-Symmetrie zu verzeichnen. Bereits deutlich schwächer ist der Einfluß der Darstellung (8, 0) und der Anteil von (10, 0) ist vernachlässigbar. Auffallend ist, daß die Beimischungen vom Drehimpuls fast unabhängig sind. Der steile Anstieg der Beimischungen der Darstellungen (6, 0), (8, 0) bzw. (10, 0) in den Figuren b), c) bzw. d) mit zunehmendem Drehimpuls hängt damit zusammen, daß sukzessive die niedrigdimensionalen ID ausfallen und nicht mehr in den Zuständen höherer Drehimpulse vertreten sind. Im Zustand L = 10 (Figur d)) ist deshalb trivialerweise die einzig verbleibende ID (10, 0) mit 100% vertreten.

Die Figur 3.15 a) gewinnt an Aussagekraft, wenn ein Vergleich mit einer Analyse der niedrigsten Sequenz L = 0, 2, . . . 24 im System $^{16}O + ^{16}O$ angestellt wird. Im Modellraum $N_{max} = 32$ liegen fünf verschiedene Sequenzen L = 0, 2, . . . N, $24 \leq N \leq N_{max}$ vor. Die Charakteristik der ersten vier Sequenzen ist in den Figuren 3.16 a) - d) dargestellt. Eine Betrachtung der Figur 3.16 a) zeigt, daß der Einfluß der ID (24, 0) in einem weiten Drehimpulsbereich stark unterdrückt ist. In den Zuständen mit $L \leq 10$ ist sie sogar noch schwächer vertreten als die Darstellung (30, 0). Erst in Zuständen mit hohen Drehimpulsen liegt eine stärkere Beimischung dieser Symmetrie vor. Große Anteile besitzen insbesondere die Darstellungen (26, 0) und (28, 0), während (32, 0) eine untergeordnete Rolle spielt. Diese Charakteristik ist völlig konträr im Vergleich zu jener, die in der ersten Sequenz des Systems $\alpha + \alpha$ vorliegt. Die starke Unterdrückung der ID (24, 0) beruht darauf, daß der entsprechende U(3)-Kanal [24 0 0] einen sehr kleinen Normeigenwert besitzt, der schon fast um eine Größenordnung kleiner ist, als der Eigenwert des U(3)-Kanals [26 0 0]. Betrachtet man $^{16}O + ^{16}O$ als ein nukleares Molekül, so sollte bei stetiger Annäherung der beiden Fragmente — also mit kleiner werdendem Bahndrehimpuls — der "fast verbotene" U(3)-kanal [24 0 0] bzw. die Darstellung (24, 0) mehr und mehr unterdrückt werden. Als direkte Folge wird der Einfluß der anderen, weniger verbotenen

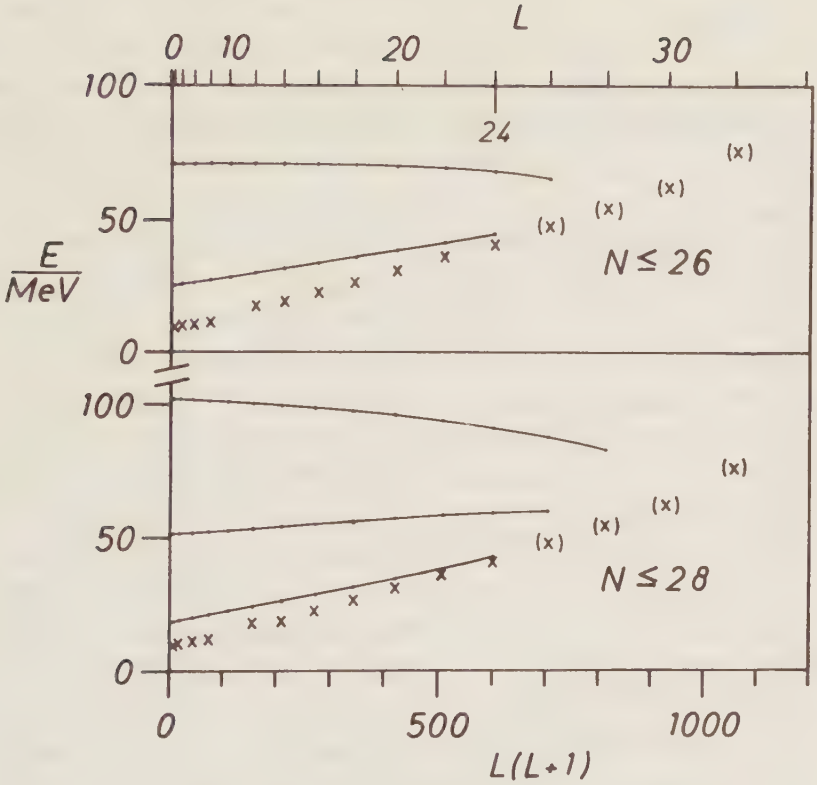
U(3)-Kanäle stärker. Dieser Vorgang spiegelt sich genau in der Figur 3.16 a) wider. D.h., daß nicht nur die total verbotenen, sondern auch die fast verbotenen U(3)-Kanäle eine wichtige Rolle bei der Molekülbildung spielen. Dieses Beispiel zeigt auch deutlich, wie wichtig es ist, eine Analyse der Normkerne und der Beimischungen von SU(3)-ID durchzuführen, um das Verhalten der kollidierenden Fragmente besser zu verstehen.

Zur Abrundung der bisherigen Diskussion ist es notwendig, nochmals auf die Figur 3.13 zurückzukommen. Wie bereits angedeutet wurde, wird die maximale Aufspaltung in der ersten Sequenz erst für ein $N_{max} > 40$ erreicht. Bei weiterer Vergrößerung des Modellraumes sollten die Niveaus wieder zusammenrücken. Es gibt also vermutlich einen größeren Modellraum ($N_{max} \approx 70$), in dem die experimentellen Daten ebenfalls reproduziert werden können. In Bezug auf die Figur 3.11 ist zu erwarten, daß sich die beiden Kurven $b_{0_{bf}}$ und $b_{0_{min}}$ bei einer hinreichenden Modellraumvergrößerung wieder annähern. Dieser Aspekt wurde aus Gründen der Rechenzeit nicht weiter verfolgt. Die Schlußfolgerungen, die aus den Rechnungen im Modellraum $N_{max} = 32$ gezogen werden, behalten auch in diesem größeren Modellraum ihre Richtigkeit, gewinnen dort aber noch sehr vielmehr an Aussagekraft, da die Zahlenwerte, auf die sich die Ausführungen stützen, sich noch drastischer von dem Vergleichsbeispiel $\alpha + \alpha$ abheben.
Ein Vergleich mit Streurechnungen [46, 47, 60]) zeigt, daß in der Figur 3.13 die 2. Sequenz relativ zur ersten auch im Modellraum $N_{max} = 40$ energetisch immernoch zu hoch liegt. Ohne Zweifel werden in größeren Modellräumen die beiden Sequenzen noch stärker ineinandergeschoben. Die Streurechnungen unterstreichen also, daß die Betrachtungen in dem größeren Modellraum anzustellen sind.

Um eine Vorstellung zu geben, wie sich die numerischen Ergebnisse ändern, wenn der Modellraum vergrößert wird, werden zum Schluß Rechnungen interpretiert, die im Modellraum $N_{max} = 40$ mit der Brink-Boeker Kraft B1 und dem Parameter $b_0 = 1.95\ fm \approx b_{0_{bf}}$ für $^{16}O + {}^{16}O$ durchgeführt wurden. In diesem Modellraum existieren 9 Sequenzen $L = 0, 2, \ldots, N$, $24 \leq N \leq N_{max}$. In den Figuren 3.17 - 3.19 ist die Energie der quasigebundenen Zustände gegen $L(L+1)$ aufgetragen. Der Drehimpuls L ist am



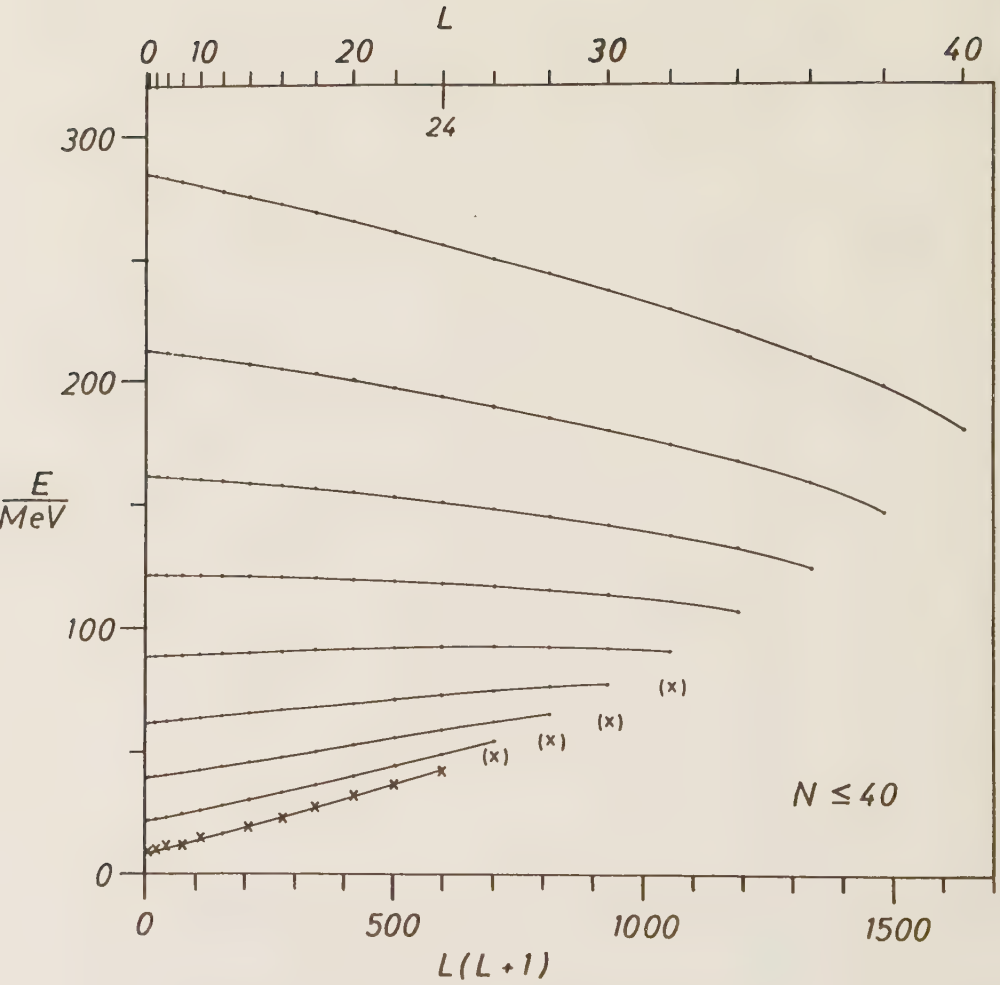
Figur 3.17



Figur 3.18

Figuren 3.17 - 3.19

Energien E = E(L) der quasigebundenen Zustände des Systems $^{16}O + ^{16}O$. Die Punkte, die auf einer Kurve liegen, entsprechen den quasigebundenen Zuständen einer Sequenz und sie geben die numerischen Ergebnisse mit der Brink-Boeker Kraft B1 und mit dem harmonischen Oszillatorparameter b_0 = 1.95 fm wieder. Dargestellt sind die Ergebnisse für den Fall. daß N_{max} = 40 und die Sequenzen nicht mischen (Figur 3.17) bzw. alle Sequenzen mischen (Figur 3.19). Die Figur 3.18 zeigt die Ergebnisse in den Modellräumen N_{max} = 26 bzw. N_{max} = 28 unter Berücksichtigung der Mischung der Sequenzen. Die Kreuze markieren die experimentellen Daten.



Figur 3.19

oberen Bildrand angegeben. Die Kreuze markieren die experimentellen Daten und die Ergebnisse theoretischer Analysen der Anregungsfunktion der elastischen $^{16}O + {}^{16}O$ - Streuung unter $\Theta_{c.m.} = 90^o$ [92, 98-101, 111-114], (siehe auch Ref. [117]). Die Daten, die durch die in Klammern gesetzte Kreuze wiedergegeben werden, wurden über die bereits geschilderte Extrapolationsmethode ermittelt. Die auf einer Kurve liegenden Punkte sind die quasigebundenen Zustände einer Sequenz.

In der Figur 3.17 fanden nur die Diagonalelemente Berücksichtigung, so daß die niedrigste Sequenz die Ergebnisse einer Rechnung im Modellraum $N_{max} = 24$ darstellt. Die Abstände zwischen den Sequenzen sind nahezu konstant und von der Größenordnung $2\hbar\omega$. Eine Übereinstimmung mit dem Experiment liegt nicht vor. Die Steigung der Sequenzen, bzw. die energetische Aufspaltung ist minimal. Im Molekülbild entspricht das einem System mit einem großen Trägheitsmoment. Die beiden Fragmente werden aufgrund der U(3)-Barriere und des fast verbotenen U(3)-Kanals auf Distanz gehalten. Aus dieser Rechnung folgt, daß es wichtig ist den Modellraum auszudehnen und die Wechselwirkung zwischen den Sequenzen in Betracht zu ziehen. Eine stärkere Bindung des Moleküls kommt offensichtlich erst dann zustande, wenn die stärker erlaubten U(3)-Kanäle Berücksichtigung finden. Sie bilden den Gegenpart zu den verbotenen und fast verbotenen U(3)-Kanälen, die für die Repulsion zwischen den beiden Fragmenten verantwortlich sind.

Nun werden die Nebendiagonalelemente mitberücksichtigt und das EWP im Modellraum $N_{max} = 26$ gelöst (obere Hälfte der Figur 3.18). Der Abstoßungseffekt zwischen den beiden Sequenzen ist im Bereich niedriger Drehimpulse sehr stark. Dort wird der Abstand auf $4\hbar\omega$ vergrößert. Durch diesen Effekt gewinnt die erste Sequenz Bindungsenergie und die Steigung nimmt zu, aber immernoch nicht stark genug, um die experimentellen Daten zu reproduzieren. Die zweite Sequenz verliert Bindung und die Steigung wird negativ.

Die untere Hälfte der Figur 3.18 zeigt die Ergebnisse im Modellraum $N_{max} = 28$. Bedingt durch das Drücken der 2. und 3. Sequenz wird die 1. Sequenz noch stärker gebunden und eine Zunahme der Steigung ist zu verzeichnen. Demzufolge hat sich der Abstand zwischen den Fragmenten verringert. Die abstoßende Wirkung der 1. und 2. Sequenz induziert einen hohen Verlust an Bindungsenergie und eine stark negative Steigung der 3.

Sequenz. Hinsichtlich der zweiten kompensieren sich die Stoßwirkungen der 1. und 3. Sequenz.

Vergrößert man nun Schritt für Schritt den Modellraum, so kommen mehr und mehr Sequenzen ins Spiel. Die Figur 3.19 zeigt alle 9 Sequenzen im Modellraum $N_{max} = 40$. Die niedrigste mit $L = 0, 2, \ldots 24$ reproduziert die experimentellen Daten gut. Resonanzen für $L > 24$ scheinen den Köpfen (Zustände größten Drehimpulses) weiterer Sequenzen zu entsprechen. Die zunehmende Abweichung mit höherem Drehimpuls ist mindestens auf drei Punkte zurückzuführen.

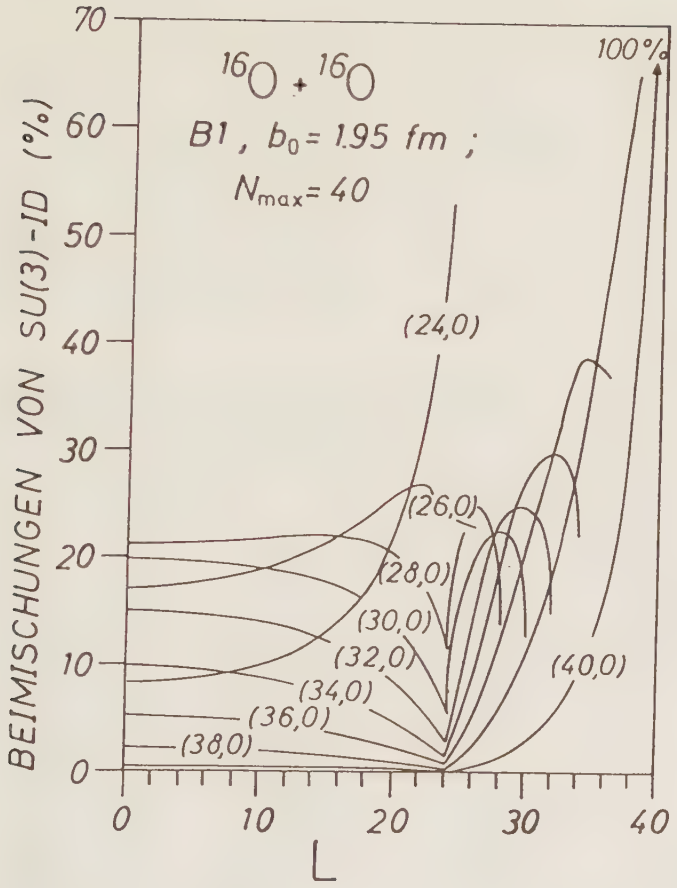
1.) Es wird eine Brink-Boeker Kraft verwendet.

2.) Mit größer werdendem Drehimpuls $L > 24$ fallen mehr und mehr U(3)-Kanäle aus und dadurch schrumpft der Diagonalisierungsraum.

3.) In einer quasigebundenen Rechnung zeigen die Relativwellenfunktionen nicht das richtige asymptotische Verhalten. Deshalb sollten Abweichungen insbesondere bei höheren Drehimpulsen auftreten, wo der Einfluß des asymptotischen Verhaltens der Wellenfunktion wichtig wird.

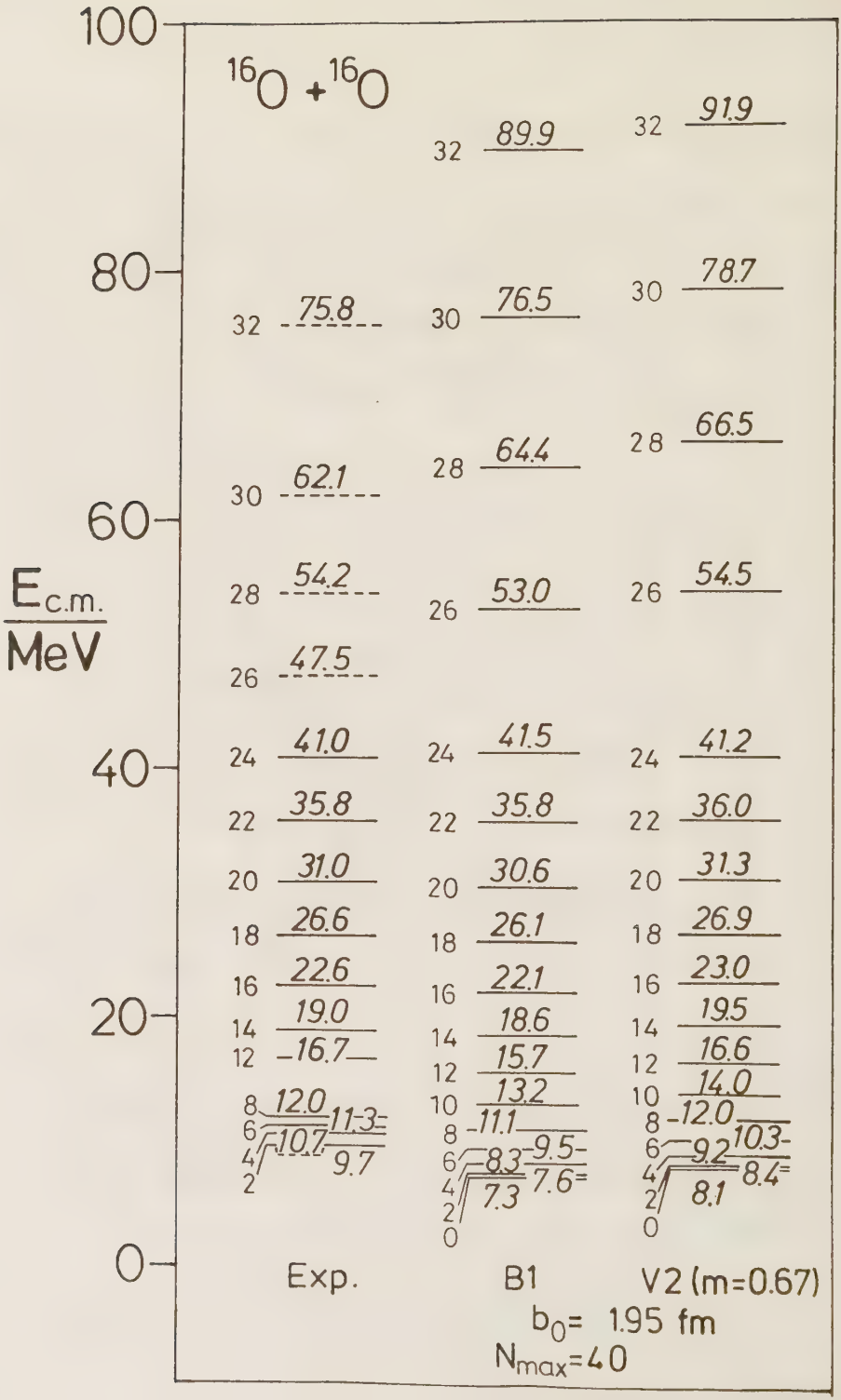
Für die energetisch niedrigsten Zustände $L = 0, 2, \ldots 40$ der Figur 3.19 können aus der Figur 3.20 die Beimischungen von SU(3)-ID entnommen werden. Ein Vergleich mit der Figur 3.16 a) zeigt deutlich, wie mit zunehmender Modellraumgröße die Symmetrie (24, 0) für kleinere Drehimpulse mehr und mehr unterdrückt wird. In einem weiten Drehimpulsbereich ist nicht mehr die Darstellung (26, 0), sondern die Darstellung (28, 0) am stärksten vertreten. Erst für größere Drehimpulse ($L \lesssim 24$) liegt ein allgemeiner Trend vor. Die Darstellungen (N, 0) verlieren mit zunehmendem N an Einfluß. Es ist also zu erkennen, daß bei Annäherung der beiden Fragmente (kleiner werdender Bahndrehimpuls) die Unterdrückung der fast verbotenen U(3)-Kanäle in einem größeren Modellraum noch stärker ausgeprägt ist. Das merkwürdige Verhalten der Kurven für $L > 24$ rührt daher, daß jeder Drehimpuls zu einer anderen Sequenz gehört; dadurch kommt eine stärkere Abhängigkeit der Charakteristik vom Drehimpuls zustande. Die Zugehörigkeit der Zustände $L \leq 24$ zu der niedrigsten Sequenz macht sich dagegen in einer unkomplizierteren Drehimpulsabhängigkeit der Beimischungen bemerkbar.

Zum Schluß sind in der Figur 3.21 für $^{16}O + {}^{16}O$ die Ergebnisse gegenübergestellt, die im Modellraum $N_{max} = 40$ mit dem Parameter $b_0 = 1.95$ fm be-



Figur 3.20

Beimischungen von SU(3)-ID in den energetisch niedrigsten Zuständen L = 0, 2, . . . 40. Untersucht wird das System $^{16}O + ^{16}O$ im Modellraum $N_{max} = 40$ mit der Brink-Boeker Kraft B1 und mit dem Parameter $b_0 = 1.95$ fm.


100
80
60
40
20
0
$E_{c.m.}$ / MeV
$^{16}O + ^{16}O$
32 75.8
30 62.1
28 54.2
26 47.5
24 41.0
22 35.8
20 31.0
18 26.6
16 22.6
14 19.0
12 16.7
8 12.0
6 10.7
4
2
11.3
9.7
32 89.9
30 76.5
28 64.4
26 53.0
24 41.5
22 35.8
20 30.6
18 26.1
16 22.1
14 18.6
12 15.7
10 13.2
8 11.1
6 8.3
4
2
0
9.5
7.6
7.3
32 91.9
30 78.7
28 66.5
26 54.5
24 41.2
22 36.0
20 31.3
18 26.9
16 23.0
14 19.5
12 16.6
10 14.0
8 12.0
6 9.2
4
2
0
10.3
8.4
8.1
Exp.
B1
V2 (m=0.67)
b_0= 1.95 fm
N_{max}=40

rechnet wurden. Aufgeführt sind auch die experimentellen Daten. Für $L > 24$ sind die experimentellen Resonanzlagen gestrichelt gezeichnet, um anzudeuten, daß sie über die Extrapolationsmethode bestimmt wurden. Bei den Rechnungen wurde einerseits die **Volkov** Kraft V2 mit $m = 0.67$ und andererseits die Brink-Boeker Kraft B1 verwendet. Im Vergleich zum Experiment schneidet die Volkov Kraft etwas besser ab. Für $L > 24$ ist die Übereinstimmung mit dem Experiment aus den bereits erwähnten Gründen schlecht. Für die Volkov Kraft unterscheiden sich die Beimischungen von SU(3)-ID in den verschiedenen Zuständen qualitativ nicht von den Ergebnissen, die mit der Brink-Boeker Kraft erzielt wurden. Es gibt nur geringfügig quantitative Unterschiede.

Ich hoffe, bis hierhin alles verständlich geschildert zu haben. Rückblickend läßt sich festhalten, daß, sofern die beiden Integralkerne in der Gleichung (2) bekannt sind, die weitere mathematische Beschreibung (z.B. für eine quasigebundene Rechnung) sehr einfach wird und sich kompakt darstellen läßt. Das Hauptproblem besteht nun darin, diese Integralkerne zu konstruieren. Aus diesem Grund beschäftigen sich die beiden nachfolgenden Kapitel mit dieser Thematik. Im Kapitel 4 wird eine völlig neue Methode entwickelt, um diese Integralkerne für beliebige Wechselwirkungen analytisch zu konstruieren.

Figur 3.21
Für $^{16}O + ^{16}O$ werden im Modellraum $N_{max} = 40$ und für den Parameter $b_0 = 1.95$ fm die gerechneten Energiespektren mit der Brink-Boeker Kraft B1 und mit der Volkov Kraft V2 ($m = 0.67$) den experimentellen Daten gegenübergestellt.

KAPITEL 4

4. DIE THEORIE DES WECHSELWIRKUNGSINTEGRALKERNS

4.1 Rekapitulation der Kramer'schen Theorie

Die Matrixelemente eines 2-Teilchen-Operators im Supermultiplettschema

Im folgenden sollen kurz die Grundlagen resümiert werden, auf denen in Ref. [15]) die Berechnung von Matrixelementen eines 2-Teilchen-Operators bezüglich total antisymmetrischen A-Teilchen-Zuständen beruht.

1.) Ein A-Teilchen-Zustand

$$|(\alpha\gamma)^A f\ [1^A]\ ) \tag{1}$$

mit der totalen Antisymmetrie $[1^A]$, dem Young Diagramm f und weiteren Charakterisierungslabel α und γ kann in seinen Bahnanteil mit dem Young Tableau r

$$|\alpha^A f\ r\ ) \tag{2}$$

und seinen Spin-Isospinanteil

$$|\gamma^A \hat{f}\ \hat{r}\ ) \tag{3}$$

wie folgt zerlegt werden:

$$|(\alpha\gamma)^A\ f\ [1^A]) = \sum_r |\alpha^A f\ r)\,|\gamma^A \hat{f}\ \hat{r})\ \frac{(-1)^r}{\sqrt{|f|}} \tag{4}$$

Hierbei sind $\hat{f}$ und $\hat{r}$ die zu f und r assoziierten Symbole, $(-1)^r$ ist die Phase des Young Tableaus und $|f|$ die Dimension des Young Diagramms f.

2.) Ein 2-Teilchen-Operator σ wird analog in zwei Operatoren T(s, t) und U(s, t) zerlegt, die auf den Orbit- bzw. den Spin-Isospinzustand wirken.

$$\sigma = \sum_{s<t}^{A} T(s,t)\ U(s,t) \tag{5.a}$$

Die Wirkung der Operatoren auf beliebige Teilchen s und t kann so eingeschränkt werden, daß nur die beiden letzten Teilchen A-1 und A betroffen sind. Wird der Permutationsoperator W(p) eingeführt, so ergibt sich aus (5.a)

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2(A-2)!} \sum_{p \in S(A)} W(p)\ T(A-1,A)\ U(A-1,A)\ W(p^{-1}) \qquad (5.b)$$

3.) Eine Klassifizierung der Bahn- bzw. Spin-Isospinzustände gemäß

$$\begin{array}{lll} S(A) > & S(A-2) \quad x & S(2) \\ f\ r & f'(r') & f'' \qquad \text{mit } f'' = [2] \text{ oder } [11] \end{array}$$

ergibt unter Berücksichtigung, daß die Operatoren T(A-1, A) = T(A, A-1) und U(A-1, A) = U(A, A-1) mit allen Elementen aus S(A-2) x S(2) kommutieren, und unter Einführung des reduzierten Matrixelements, in dem die Young Tableau-Abhängigkeit eliminiert ist,

$$\left(\alpha^A \tilde{f}(\tilde{f}'(\tilde{r}')\,\tilde{f}'') \,\middle|T(A-1,A)\middle|\, \alpha^A f(f'(r')\,f'')\right) = \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\tilde{f}'|}}\, \delta(\tilde{f}',f')\, \delta(\tilde{r}',r')\, \delta(\tilde{f}'',f'') \left(\alpha^A \tilde{f}(f'\,f'') \,\middle\|T(A-1,A)\middle\|\, \alpha^A f(f'\,f'')\right) .$$

Eine analoge Beziehung ergibt sich für die Matrixelemente des Operators U(A-1, A).

Mittels 1.) - 3.) findet man schließlich für die Matrixelemente des Operators $\mathcal{O}$ bezüglich total antisymmetrischen A-Teilchen-Zuständen

$$\left((\alpha\gamma)^A \tilde{f}\,[1^A] \,\middle|\, \mathcal{O} \,\middle|\, (\alpha\gamma)^A f\,[1^A]\right) = \qquad (7)$$

$$\frac{\binom{A}{2}}{\sqrt{|\tilde{f}|\,|f|}} \sum_{f'f''} \left(\alpha^A \tilde{f}(f'f'') \,\middle\|T(A-1,A)\middle\|\, \alpha^A f(f'f'')\right)\left(\gamma^A \hat{\tilde{f}}(\hat{f}'\hat{f}'') \,\middle\|U(A-1,A)\middle\|\, \gamma^A \hat{f}(\hat{f}'\hat{f}'')\right) .$$

Mit der Schreibkonvention

$$T(A-1,A) \equiv T(2) \qquad (8.a)$$

und für den Fall

$$U(A-1,A) = \underline{1} \qquad (8.b)$$

läßt sich die Gleichung (7) vereinfachen:

$$\left((\alpha\gamma)^A \tilde{f}\,[1^A] \,\middle|\, \mathcal{O} \,\middle|\, (\alpha\gamma)^A f\,[1^A]\right) = \qquad (8.c)$$

$$\frac{\binom{A}{2}\delta(\tilde{f},f)}{|f|} \sum_{f'f''} \sqrt{|f'|}\, \left(\alpha^A f(f'f'') \,\middle\|T(2)\middle\|\, \alpha^A f(f'f'')\right) .$$

Die Annahme (8.b) schließt die mikroskopische Coulomb Wechselwirkung

$$T(s,t) = \frac{e^2}{|r_s - r_t|} \quad , \tag{9.a}$$

$$U(s,t) = \left(\frac{1}{2} + \tau_3^s\right)\left(\frac{1}{2} + \tau_3^t\right) \tag{9.b}$$

aus. Da dieser Typ von Wechselwirkung ebenfalls mitberücksichtigt werden soll, wird im Anhang A gezeigt, daß für die Partitionen $f = [4^j]$, $j = 2, 3, \ldots$ (nur mit solchen Zuständen werde ich es zu tun haben)

$$\left((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}] \;\middle|\; \mathcal{O} \;\middle|\; (\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\right) = \tag{9.c}$$

$$\frac{\binom{4j}{2}}{|[4^j]|} \sum_{f''=[2],[11]} \left(\alpha^{4j}\,[4^j]\,(f''^c f'') \,\|T(2)\|\, \alpha^{4j}\,[4^j]\,(f''^c f'')\right)\sqrt{|f''^c|}\; a_{f''} \quad ,$$

$$a_{[2]} := \frac{1}{6} \quad , \quad a_{[11]} := \frac{3}{10}$$

gilt. Dieses Ergebnis läßt sich formal aus (8.c) gewinnen. Da $f = [4^j]$ einem geschlossenen Diagrammblock entspricht, ist in einer Zerlegung f' eindeutig durch f'' festgelegt ($f' = f''^c$). Die beiden Summanden, auf die sich die Summe dann reduziert, müssen lediglich mit einem Symmetriefaktor $a_{f''}$ gewichtet werden. Es genügt also, die weitere Diskussion auf der Grundlage von (8.c) fortzusetzen.

4.) Die Bahnzustände wurden bislang hinsichtlich ihres Transformationsverhaltens unter der Wirkung der symmetrischen Gruppe S(A) klassifiziert,

$$|\alpha^A\, f\, r)$$

Darüber hinaus lassen sie sich auch bezüglich der Wirkung der allgemeinen linearen Gruppe mittels f und einem Gelfandpattern q charakterisieren. Der Zustand

$$|\alpha^A\, f\, r\, q)$$

gibt dann das Transformationsverhalten unter

$$S(A) \quad x \quad GL(j, \mathbb{C})$$

an, wobei j der Anzahl der Gewichtskomponenten des Gelfand Pattern q entspricht.

5.) Mit der fractional parentage Methode im Orbitraum kann ein A-Teilchen-

zustand in einen A′- und einen A′′- Teilchen-Zustand zerlegt werden;

$$|\alpha^{A} f(f'(r')f''(r'')) q\rangle = \sum_{q',q''} |\alpha^{A'} f' r' q'\rangle\ |\alpha^{A''} f'' r'' q''\rangle \langle f' q'\ f'' q'' | f q\rangle \quad . \tag{10}$$

In dieser Zerlegung treten die fractional parentage Koeffizienten auf. Basierend auf 4.) und 5.) ergibt sich für die reduzierten Matrixelemente eines A′′- Teilchen-Operators T(A′′) bezüglich der A-Teilchen-Zustände (10)

$$(\alpha^{A} \tilde{f}(f' f'')\, \tilde{q}\ \|T(A_2)\|\ \alpha^{A} f(f' f'') q) = \sqrt{|f'|} \sum_{\tilde{q}'' q''} \Big(\sum_{\tilde{q}' q'} \langle \tilde{f}\, \tilde{q} | f' \tilde{q}'\ f'' \tilde{q}''\rangle D^{f'}_{\tilde{q}'\tilde{q}'}(\varepsilon) \langle f' q'\ f'' q'' | f q\rangle \Big) (\alpha^{A''} f'' \tilde{q}''\ \|T(A'')\|\ \alpha^{A''} f'' q'') \tag{11}$$

In Gleichung (11) wurde ausgenutzt, daß der Überlapp der beiden A′-Teilchen-Zustände aufgrund ihres Transformationsverhaltens durch ein Matrixelement der ID $D^{f'}$ von GL(j, ℂ) gegeben ist,

$$(\alpha^{A'} f' r' \tilde{q}' | \alpha^{A'} f' r' q') = D^{f'}_{\tilde{q}'q'}(\varepsilon) \quad . \tag{12}$$

Die Matrix ε ist die Überlappmatrix der j auftretenden 1-Teilchen-Zustände.

Will man die elastische Streuung von zwei Fragmenten mit geschlossenen Schalen beschreiben, so treten nur Konfigurationen vom Typ $\tilde{f} = f = [4^j]$ auf. Zu diesen Konfigurationen existiert nur ein einziges, das maximale, Gelfand Pattern $\tilde{q} = q = q_{max}$. Dieser Label kann daher unterdrückt werden. Die Eigenschaft der fractional parentage Koeffizienten erzwingt außerdem die Konjugationsbeziehungen

$$f' = f''^{c}, \quad q' = q''^{c}, \quad \tilde{q}' = \tilde{q}''^{c} \quad .$$

Damit vereinfacht sich (11) zu

$$(\alpha^{4j}\ [4^j](f''^{c} f'')\ \|T(A')\|\ \alpha^{4j}\ [4^j](f''^{c} f'')) = \sqrt{|f''^{c}|} \sum_{\tilde{q}'' q''} \langle [4^j] | f''^{c}\, \tilde{q}''^{c} f'' \tilde{q}''\rangle\ D^{f''^{c}}_{\tilde{q}''^{c} q''^{c}}(\varepsilon)\ \langle f''^{c} q''^{c}\ f'' q'' | [4^j]\rangle \cdot (\alpha^{A''} f'' \tilde{q}''\ \|T(A'')\|\ \alpha^{A''} f'' q'') \tag{13}$$

Benutzt man endlich den Zusammenhang zwischen den Darstellungen $D^{f''^c}$ und $D^{f''}$, so gelangt man zu der in Ref. [15]) angegebenen Formel für den 2-Teilchen-Operator T(2)

$$(\alpha^{4j}\ [4^j]\,(f''^c f'')\ \|T(2)\|\ \alpha^{4j}\ [4^j]\,(f''^c f'')) \quad = \tag{14}$$

$$\frac{\sqrt{if''^c|}\ (\det(\varepsilon))^4}{\dim(f'',j)} \sum_{\tilde{q},q} D^{f''}_{q\tilde{q}}(\varepsilon^{-1})\ (\alpha^2 f''\tilde{q}\ \|T(2)\|\ \alpha^2 f'' q)\ ,$$

in der $\dim(f'',j)$ die Dimension der ID $D^{f''}$ von GL(j, ℂ) bedeutet.
In diesem letzten Schritt wurden die fractional parentage Koeffizienten und die sehr komplizierten Ausdrücke für die Elemente der ID $D^{f''^c}$ eliminiert. Statt dessen treten jetzt die weitaus einfacheren Elemente der ID $D^{f''}$ mit $f'' = [2]$ oder $[11]$ auf. Allerdings muß dafür ein Nachteil in Kauf genommen werden; anstelle der Überlappmatrix ε tritt nun die inverse Matrix ε^{-1} auf und die Determinante von ε. Mit der Gleichung (8.c) könnten dann letztendlich für diese Konfigurationen die Matrixelemente des Operators $\mathcal{O}$ bezüglich total antisymmetrischen 4j-Teilchen-Zuständen berechnet werden.

Die Wechselwirkungsintegralkerne

Zunächst muß angemerkt werden, daß man nicht an den Matrixelementen (8.c) des Operators $\mathcal{O}$ primär interessiert ist, sondern an dem in der Intgralgleichung 3.(2) (Gleichung (2) des Kapitels 3.) auftretenden Kern des Operators $\mathcal{O}$, der bar des Orbitzustandes der Cluster ist.
In diesem Abschnitt sollen daher die in Ref. [15]) beschriebenen Schritte zusammengefaßt werden, die es erlauben, in Anlehnung an das im vorigen Abschnitt entwickelte Konzept, diesen Kern zu berechnen.

1.) Es wird ein Produkt aus A 1-Teilchen-Zustandsfunktionen

$$l(x) = \prod_{i=1}^{A} \mu_i(x_i) = \prod_{i=1}^{A} (x_i \mid \mu_i) \tag{15}$$

mit den 1-Teilchen-Koordinaten $x = (x_1, x_2, \ldots x_A)^t$ definiert.

Bemerkung: Manche 1-Teilchen-Zustände können dabei durchaus identisch sein.

Durch Anwendung des Young Operators c(r f q) auf den Produktzustand ergibt sich der Zusammenhang zu den bereits eingeführten Zuständen

$$(x\,|\alpha^A f\, r\, q) = c(r\, f\, q)\, l(x) \quad . \tag{16}$$

Die 1-Teilchen-Koordinaten x werden durch die Matrix J^{-1} auf die Schwerpunktskoordinaten z und die intrinsischen Koordinaten y der Cluster transformiert,

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = J^{-1} x \quad . \tag{17}$$

Der Operator der Transformation J wird mit

$$S_{g_c(J^{-1})} \quad , \qquad g_c(J^{-1}) = \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{pmatrix} \tag{18}$$

bezeichnet.

Außerdem wird angenommen, daß die Zustandsfunktion l(x) beim Übergang auf die Koordinaten z und y in die Orbitzustandsfunktion u(z) und in die intrinsische Zustandsfunktion v(y) der Cluster separiert,

$$l(x) = S_{g_c(J^{-1})}\, l\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = u(z)\, v(y) \quad . \tag{19}$$

Somit läßt sich nun die Orbitzustandsfunktion der Cluster herausziehen,

$$\begin{aligned} l(x) &= \int \underbrace{\langle z\,|\,z'\rangle}\, \langle z'\,|\,u\rangle v(y)\, d\mu(z') \qquad (20) \\ &\quad = \exp(z\cdot z'^{*}) \;=: e_{z'}(z) \\ &= \int \underbrace{(e_{z'} v) \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}}\, u(z')\, d\mu(z') \\ &\quad = e_{z'} v(J^{-1}x) = \underbrace{(S_{g_c(J)}\, e_{z'} v)\,(x)} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = :\, l_{z'}(x) \end{aligned}$$

und der verbleibende Rest lautet

$$l_{z'}(x) = \exp(z\cdot z'^{*})\, v(y) \quad . \tag{21}$$

2.) Nun soll die Wirkung des Weyl Operators auf den Zustand l näher betrachtet werden;

$$W_{\tau_c} : l \mapsto W_{\tau_c}\, l$$

mit

$$\tau_c := \begin{pmatrix} t \\ t^* \end{pmatrix} \quad , \qquad t := (\underbrace{t_1, \ldots t_1}_{A_1}, \underbrace{t_2, \ldots t_2}_{A_2}, \ldots \underbrace{t_k, \ldots t_k}_{A_k})^t \quad , \tag{22}$$

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \quad .$$

Bei dieser Notation wird von k Clustern ausgegangen, wobei der i-te Cluster aus A_i Nukleonen aufgebaut ist. Es gilt dann

$$J^{-1} t = (\sqrt{A_1}\, t_1, \sqrt{A_2}\, t_2, \ldots \sqrt{A_k}\, t_k, 0, \ldots . 0)^t \quad , \tag{23}$$

$$g_c(J^{-1})\tau_c = \begin{pmatrix} (\sqrt{A_1}\, t_1, \ldots \sqrt{A_k} t_k, 0, \ldots . 0)^t \\ (\sqrt{A_1}\, t_1^*, \ldots \sqrt{A_k} t_k^*, 0, \ldots . 0)^t \end{pmatrix} \quad . \tag{24}$$

Diese Beziehungen erlauben die folgenden Umformungen

$$W_{\tau_c}(x) = \left(S_{g_c(J^{-1})} \circ W_{\tau_c} \, 1\right) \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$= \underbrace{\left(S_{g_c(J^{-1})} \circ W_{\tau_c} \circ S_{g_c(J)}\right)}_{} \circ S_{g_c(J^{-1})} \, 1 \Big) \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$$

$$= W_{g_c(J^{-1})\tau_c}$$

$$= W_{g_c(J^{-1})\tau_c} \; u(z)\; v(y)$$

$$= v(y)\; u \begin{pmatrix} z_1 - \sqrt{A_1}\, t_1 \\ \vdots \\ z_k - \sqrt{A_k}\, t_k \end{pmatrix} \exp\Big(\sum_{i=1}^{k} (z_i - \frac{\sqrt{A_i}\, t_i}{2}) \cdot \sqrt{A_i}\, t_i^* \Big) \quad .$$

Benutzt man, daß der Weyl Operator in zwei Operatoren zerlegbar ist (siehe Ref. [15]))

$$W_{\tau_c} = \Lambda_t \circ V_t \; \exp(-\tfrac{1}{2} t \cdot t^*) \quad , \tag{26}$$

$$\Lambda_t : \; g \mapsto \Lambda_t g \, , \; \Lambda_t g(x) = \exp(x \cdot t^*)\; g(x) \quad ,$$

$$V_t : \; g \mapsto V_t g \, , \; V_t g(x) = g(x - t) \quad ,$$

$$V_t \circ V_{t'} = V_{t + t'} \quad , \quad \Lambda_t^+ = V_{-t} \quad , \quad \Lambda_t \circ V_{t'} = V_{t'} \circ \Lambda_t \exp(t' \cdot t^*) \quad ,$$

so ergibt sich daraus

$$\Lambda_t \circ V_t \, \mathfrak{l}(x) = v(y) \; u \begin{pmatrix} z_1 - \sqrt{A_1}\, t_1 \\ \vdots \\ z_k - \sqrt{A_k}\, t_k \end{pmatrix} \exp\Big(\sum_{i=1}^{k} \sqrt{A_i}\, z_i \cdot t_i^* \Big) \quad . \tag{27}$$

Unter der Annahme, daß die Schwerpunkte der k Cluster keine Anregung tragen, und daß ferner

$$z_i' = \sqrt{A_i}\, t_i \tag{28}$$

gilt, wird die Zustandsfunktion (21)

$$\Lambda_t \circ V_t \, \mathfrak{l}(x) = \exp(z \cdot z'^*) \; v(y) = \mathfrak{l}_{z'}(x) \tag{29}$$

reproduziert.

Nun läßt sich sofort das zuvor zusammengefaßte Konzept auf die Berechnung des Integralkerns des Operators $\mathcal{O}$ für die Konfigurationen $[4^j]$ eines 2-Cluster-Systems übertragen. Aus (8.c) folgt

$$\big((\alpha\gamma)^{4j} \; [4^j] \; [1^{4j}] \; \big| \mathcal{O}(\bar{t}_1, \bar{t}_2 \, ; t_1, t_2) \big| \; (\alpha\gamma)^{4j} \; [4^j] \; [1^{4j}] \big) = \tag{30}$$

$$\frac{\binom{4j}{2}}{|[4^j]|} \sum_{f''=[2],[11]} \sqrt{|f''^c|} \; \big(\alpha^{4j} \; [4^j] \; (f''^c \; f'') \; \| T(2)(\bar{t}_1, \bar{t}_2 \, ; t_1, t_2) \| \alpha^{4j} \; [4^j] \; (f''^c \; f'') \big)$$

und aus (14) erhält man

$$\big(\alpha^{4j} \; [4^j] \; (f''^c \; f'') \; \| T(2)(\bar{t}_1, \bar{t}_2 \, ; t_1, t_2) \| \; \alpha^{4j} \; [4^j] \; (f''^c \; f'') \big) = \tag{31}$$

$$\frac{\sqrt{|f''^c|}\,(\det\varepsilon)^4}{\dim(f'', j)} \sum_{\bar{q},q} D^{f''}_{q\,\bar{q}}(\varepsilon^{-1}) \; \big(\alpha^2 \; f'' \; \bar{q} \; \| T(2)(\bar{t}_1, \bar{t}_2 \, ; t_1, t_2) \| \; \alpha^2 \; f'' q \big)$$

mit den Elementen der 1-Teilchen-Überlappmatrix

$$\varepsilon_{\bar{\mu}_1 \bar{m}_1, \mu_1 m_1} = \big(\bar{\mu}_1 \; \big| \; \Lambda_{-\bar{t}_{\bar{m}_1}} \circ V_{-\bar{t}_{\bar{m}_1}} \circ \Lambda_{t_{m_1}} \circ V_{t_{m_1}} \; \big| \; \mu_1 \big) \quad , \tag{32}$$

die aus (29), (22), (15) und (26) ableitbar sind.

Die Indizierung wurde eingeführt, um zwischen den beiden Clustern und deren j_1 bzw. j_2 besetzten Bahnzuständen zu unterscheiden;

$$m_1 = 1: \quad \mu_1 = 1, 2, \ldots j_1 ; \qquad (33)$$
$$m_1 = 2: \quad \mu_1 = 1, 2, \ldots j_2 .$$

Für das reduzierte Element ergibt sich

$$\left(\alpha^2 f'' \bar{q} \,\|T(2)(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 ; t_1, t_2)\|\, \alpha^2 f'' q\right) = \qquad (34)$$
$$\left(\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 \,|\, \Lambda_{-\tilde{t}_{\tilde{m}_1}, -\tilde{t}_{\tilde{m}_2}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{m}_1}, -\tilde{t}_{\tilde{m}_2}} \circ c(\tilde{\mu}_1 \tilde{m}_1 \tilde{\mu}_2 \tilde{m}_2 f'') \circ T(2)\right.$$
$$\left. \circ c(f'' \mu_1 m_1 \mu_2 m_2) \circ \Lambda_{t_{m_1}, t_{m_2}} \circ V_{t_{m_1}, t_{m_2}} \,|\, \mu_1 \mu_2\right) .$$

Hier wurde für das Gelfand Pattern q eine neue, dem 2-Cluster-Problem angepaßte Indizierung eingeführt ;

$$q \equiv \mu_1 m_1 \mu_2 m_2 \qquad (35)$$

mit

$$11 \leq \mu_1 m_1 \;(\leq)\; \mu_2 m_2 \leq j_2 2 \qquad (\leq) \equiv \begin{cases} < \text{für } f'' = [11] \\ \leq \text{für } f'' = [2] \end{cases} .$$

Bezüglich der Ordnungsrelation < ist die Abfolge der Elemente :

$$\underbrace{11,\ 21,\ \ldots j_1 1,}_{\text{Zustände im 1. Cluster}}\ \underbrace{12,\ 22,\ \ldots j_2 2}_{\text{Zustände im 2. Cluster}} .$$

Diese Indizierung wurde deshalb so ausführlich diskutiert, weil sie sich als zweckmäßig erweisen wird bei der Weiterentwicklung der Theorie des Wechselwirkungsintegralkerns und weil sie von der Notation in Ref. [15]) abweicht.

Kritik :

Soweit habe ich nun die in Ref. [15]) vorgeschlagene Methode zur Berechnung des Integralkerns im Falle von 2-Teilchen-Wechselwirkungen in kompakter Form dargestellt.

Ein Anliegen dieser Arbeit sollte sein, über die Kollision zweier Fragmente mit s-Schalenstruktur hinaus, die Kollision von Kernen mit nicht trivialer

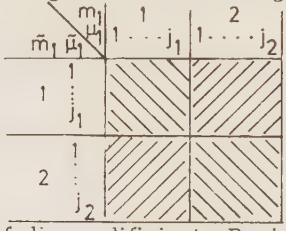
Schalenstruktur zu untersuchen. Dabei stellten sich bei dem Versuch, die Gleichungen (30) und (31) in numerische Programme umzusetzen, unüberwindliche Probleme ein. Das Hauptproblem bestand darin, daß — sobald eines der oder beide Fragmente eine sp oder höhere Schalenstruktur hatten — durch die 1-Teilchenzustände mit $l \geq 1$ sphärische Komponenten über die Darstellung $D^{f''}$ und über die reduzierten Elemente in der Gleichung (31) explizit ins Spiel kamen. Dadurch erhielt der Ausdruck eine außerordentlich komplizierte Struktur, die eine Berechnung auf analytischem Wege von vornherein ausschloß. Selbst der Versuch, die Koeffizienten der Potenzterme, die aus diesen sphärischen Komponenten aufgebaut sind, numerisch abzuspeichern, muß praktisch scheitern, da ein zu großer Speicherbedarf und eine zu lange Rechenzeit zur Berechnung der Koeffizienten erforderlich wären.
Ein untergeordnetes, wenn auch nicht unter den Tisch zu kehrendes Problem ist die Umkehr der Überlappmatrix ε, die eine analytische Konstruktion des Integralkerns erschwert. Im Fall der Kollision zweier α-Teilchen sind nur zwei s-Zustände vorhanden, deshalb müßte nur eine 2 x 2-Matrix analytisch invertiert werden. Doch für $\alpha + {}^{16}O$ ist bereits eine 5 x 5 Matrix, für ${}^{16}O + {}^{16}O$ eine 8 x 8-Matrix, ... und für ${}^{40}Ca + {}^{40}Ca$ eine 20 x 20-Matrix analytisch zu invertieren. Mit komplexer werdenden Fragmenten entsteht auch hier ein zunehmendes Problem.
Was ist nun die Veranlassung, trotz allem an dem Konzept im Bargmann Raum festzuhalten? Einerseits ist bekannt, daß die Oszillatorzustände eine sehr einfache Form besitzen und Kerne einfacher konstruierbar als im Schrödinger Bild und analytisch sind. Andererseits muß der Integralkern eines mit dem Drehimpulsoperator kommutierenden Operators bei Fragmenten mit geschlossener Schale aus Skalarprodukten aufbaubar sein. D.h., daß z.B. die Integralkerne der kinetischen Energie, der Coulomb, Brink-Boeker oder Volkov Kräfte etc. überhaupt nicht explizit von den sphärischen Komponenten abhängen können. Es muß daher eine Konstruktionsmethode für den Integralkern existieren, in der die sphärischen Komponenten nicht auftreten. Das Ziel besteht also darin, für die Gleichungen (30) und (31) eine völlig neue algebraische Formulierung zu finden, in der an die Stelle der (reduzierten) 2-Teilchen-Matrixelemente und der Darstellung $D^{f''}$ skalare Grös-

sen treten. Eine solche Konstruktionsmethode möchte ich jetzt Schritt für Schritt entwickeln.

4.2 Entwicklung eines neuen Konzepts
Teil A :
Ableitung der Grundformel

Vereinfachung des Invertierungsproblems der Überlappmatrix in der modifizierten Basis

Die allgemeine Gestalt der Überlappmatrix ε bei der elastischen Streuung zweier Cluster ist im folgenden Schema dargestellt.



$$\equiv \quad \varepsilon \tag{36}$$

Nach dem Wechsel auf die modifizierte Basis

$$\Lambda_{t_{m_1}} \circ V_{t_{m_1}} |\mu_1) = \sum_{\mu_1'} \overbrace{\Lambda_{t_{m_1}} \circ V_{\tilde{t}_{m_1}} |\mu_1')}^{\text{modifizierter Zustand}} \overbrace{(\mu_1' | V_{t_{m_1} - \tilde{t}_{m_1}} |\mu_1)}^{=:\eta_{\mu_1' m_1 \mu_1 m_1}} \tag{37}$$

$$(\tilde{\mu}_1 | \Lambda_{-\tilde{t}_{\tilde{m}_1}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{m}_1}} = \sum_{\tilde{\mu}_1'} \underbrace{(\tilde{\mu}_1 | \Lambda_{t_{\tilde{m}_1} - \tilde{t}_{\tilde{m}_1}} |\tilde{\mu}_1')}_{=:\xi_{\tilde{\mu}_1 \tilde{m}_1 \tilde{\mu}_1' \tilde{m}_1}} \underbrace{(\tilde{\mu}_1' | \Lambda_{-t_{\tilde{m}_1}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{m}_1}}}_{\text{modifizierter Zustand}}$$

folgt aus (26), daß die Blöcke $\tilde{m}_1 = m_1$ der modifizierten Überlappmatrix $\hat{\varepsilon}$

$$\hat{\varepsilon}_{\tilde{\mu}_1' \tilde{m}_1 \mu_1' m_1} = (\tilde{\mu}_1' | \Lambda_{-t_{\tilde{m}_1}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{m}_1}} \circ \Lambda_{t_{m_1}} \circ V_{\tilde{t}_{m_1}} | \mu_1') \tag{38}$$

diagonal sind und es gilt die Beziehung

$$\varepsilon = \xi \hat{\varepsilon} \eta \quad .$$

Da der Verschiebungsoperator V den Grad eines Polynoms nicht ändern kann,

treten in (37) nur endliche Summen auf. Die eingeschobenen Zustände $|\mu_1'\rangle$ bzw. $|\tilde{\mu}_1'\rangle$ sind aus der selben, durch m_1 bzw. $\tilde{m}_1$ vorgegebenen 1-Teilchen-Zustandsbasis wie die Zustände $|\mu_1\rangle$ bzw. $|\tilde{\mu}_1\rangle$.

Behauptung 4.1

In der modifizierten Basis gilt für die Gleichung (31)

$$\left(\alpha^{4j}[4^j](f''^{c}\, f'')\, \|T(2)(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2\,;t_1,t_2)\|\, \alpha^{4j}[4^j](f''^{c}\, f'')\right) = \tag{39}$$

$$\frac{\sqrt{|f''^{c}|}(\det\hat{\varepsilon})^4}{\dim(f'',j)} \sum_{\tilde{q},q} D^{f''}_{q\,\tilde{q}}(\hat{\varepsilon}^{-1})\, \left(\hat{\alpha}^2\, f''\, \tilde{q}\, \|T(2)(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2\,;t_1,t_2)\|\, \hat{\alpha}^2\, f''q\right)$$

mit dem reduzierten 2-Teilchen-Matrixelement in der modifizierten Basis :

$$\left(\hat{\alpha}^2\, f''\tilde{q}\, \|T(2)(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2\,;t_1,t_2)\|\, \hat{\alpha}^2\, f''q\right) = \tag{40}$$

$$\left(\tilde{\mu}_1\,\tilde{\mu}_2\,|\Lambda_{-t_{\tilde{m}_1},-t_{\tilde{m}_2}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{m}_1},-\tilde{t}_{\tilde{m}_2}} \circ c(\tilde{\mu}_1\,\tilde{m}_1\,\tilde{\mu}_2\,\tilde{m}_2\,f'') \circ T(2) \circ\right.$$

$$\left. c(f''\,\mu_1\,m_1\,\mu_2\,m_2) \circ \Lambda_{t_{m_1},t_{m_2}} \circ V_{\tilde{t}_{m_1},\tilde{t}_{m_2}}\,|\mu_1\,\mu_2\right) .$$

Beweis 4.1

Aus (37) folgt das Transformationsverhalten der 2-Teilchen-Zustände und daraus ergibt sich

$$\left(\alpha^2\, f''\tilde{q}\, \|T(2)(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2\,;t_1,t_2)\|\, \alpha^2\, f''q\right) = \tag{41}$$

$$\sum_{\tilde{q}'q'} D^{f''}_{\tilde{q}\,\tilde{q}'}(\xi)\left(\hat{\alpha}^2\, f''\,\tilde{q}'\, \|T(2)(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2\,;t_1,t_2)\|\, \hat{\alpha}^2\, f''q'\right) D^{f''}_{q',q}(\eta) \quad .$$

Setzt man dieses Ergebnis in (31) ein und verwendet man die Umformung

$$\sum_{\tilde{q},q} D^{f''}_{q',q}(\eta)\, D^{f''}_{q\,\tilde{q}}(\varepsilon^{-1})\, D^{f''}_{\tilde{q}\,\tilde{q}'}(\xi) = D^{f''}_{q',\tilde{q}'}(\eta\varepsilon^{-1}\xi) \tag{42}$$

$$= D^{f''}_{q',\tilde{q}'}(\hat{\varepsilon}^{-1})$$

so folgt daraus die Behauptung, wenn noch berücksichtigt wird, daß $\det(\varepsilon) = \det(\hat{\varepsilon})$ gilt [14]).

In Gleichung (39) tritt jetzt nur noch die modifizierte Überlappmatrix auf. Das Invertierungsproblem ist also nun z.B. für $^{16}O + ^{16}O$ auf eine 4 x 4-Matrix oder für $^{40}Ca + ^{40}Ca$ auf eine 10 x 10-Matrix reduziert. Außerdem ist die Determinante von $\hat{\varepsilon}$ einfacher zu berechnen als die von ε. Aber immernoch läßt das durch die sphärischen Komponenten hereingetragene Problem ein Weiterkommen scheitern. In den nächsten zwei Abschnitten werde ich versuchen, dieses Problem zu eliminieren.

Elimination der Symmetrie

In diesem Abschnitt wird über eine Koeffiziententechnik eine Umformung des in der Gleichung (39) auftretenden Ausdruckes

$$\sum_{\tilde{q},q} D^{f''}_{q\,\tilde{q}}(\hat{\varepsilon}^{-1})\,(\hat{\alpha}^2\, f''\tilde{q}\,\|T(2)(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2;t_1,t_2)\|\,\hat{\alpha}^2\, f''q) \tag{43}$$

durchgeführt. dies führt auf eine vereinfachte Form, in der die Symmetrie f'' eliminiert ist. Doch bevor von der Symmetrieabhängigkeit abgegangen werden kann, muß der Teil des Operators T(2), dessen Wirkung explizit von der Symmetie des 2-Teilchen-Zustandes abhängt, ausgewertet werden. Die Annahme sei, daß der 2-Teilchen-Operator T(2) sich aus einem Wigner und Majorana Anteil zusammensetzt,

$$\begin{aligned} T(2) \equiv T(A-1,A) &= \tilde{T}(A-1,A)\;(w + m\,P(A-1,A)) \\ &\equiv \tilde{T}(2)\;(w + m\,P(2)) \end{aligned} \tag{44}$$

wobei der Operator P(A-1,A) die beiden letzten Teilchen vertauscht und w und m sind Konstanten. Dies läßt sich auf eine der Zustandsklassifizierung entsprechende Form

$$T(2) = \tilde{T}(2) \sum_{f''=[2],[11]} a_{f''}\; P_{f''}(2) \tag{45}$$

mit

$$a_{[2]} := w + m \quad , \qquad P_{[2]}(2) = \frac{1 + P(2)}{2} \quad ,$$

$$a_{[11]} := w - m \quad , \qquad P_{[11]}(2) = \frac{1 - P(2)}{2} \quad ;$$

bringen. Daraus folgt

$$\sum_{\tilde{q},q} D^{f''}_{q\,\tilde{q}}(\hat{\varepsilon}^{-1})\,(\hat{\alpha}^2 f''\tilde{q}\,\|\tilde{T}(2)(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2;t_1,t_2)\|\hat{\alpha}^2 f''q) \quad = \quad (46)$$

$$a_{f''}\sum_{\tilde{q},q} D^{f''}_{q\,\tilde{q}}(\hat{\varepsilon}^{-1})\,(\hat{\alpha}^2 f''\tilde{q}\,\|\tilde{T}(2)(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2;t_1,t_2)\|\hat{\alpha}^2 f''q) \quad .$$

Nach diesem Zwischenschritt ist nun das wohldefinierte Transformationsverhalten der 2-Teilchen-Zustände nicht mehr erforderlich.

Behauptung 4.2

Für die in der Gleichung (46) auftretenden 2-Teilchen-Zustände in der modifizierten Basis, mit der Symmetrie f'' gilt

$$(\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\,|\,\Lambda_{-t_{\tilde{m}_1},-t_{\tilde{m}_2}}\circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{m}_1},-\tilde{t}_{\tilde{m}_2}}\circ c(\tilde{\mu}_1\,\tilde{m}_1\,\tilde{\mu}_2\,\tilde{m}_2\,f'') \quad = \quad (47.a)$$

$$\sum_{\tilde{\nu}_1\tilde{n}_1=11}^{j_2^2}\sum_{\tilde{\nu}_2\tilde{n}_2=11}^{j_2^2}(\tilde{\mu}_1\,\tilde{m}_1\,\tilde{\mu}_2\,\tilde{m}_2\,f''\,|\,\tilde{\nu}_1\,\tilde{n}_1\,\tilde{\nu}_2\,\tilde{n}_2)\,(\tilde{\nu}_1\,\tilde{\nu}_2\,|\,\Lambda_{-t_{\tilde{n}_1},-t_{\tilde{n}_2}}\circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}} \quad ,$$

bzw.

$$c(f''\mu_1\,m_1\,\mu_2\,m_2)\circ\Lambda_{t_{m_1},t_{m_2}}\circ V_{\tilde{t}_{m_1},\tilde{t}_{m_2}}\,|\,\mu_1\,\mu_2) \quad = \quad (47.b)$$

$$\sum_{\nu_1 n_1=11}^{j_2^2}\sum_{\nu_2 n_2=11}^{j_2^2}\Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}}\circ V_{\tilde{t}_{n_1},\tilde{t}_{n_2}}\,|\,\nu_1\,\nu_2)\,(\nu_1\,n_1\,\nu_2\,n_2\,|f''\,\mu_1\,m_1\,\mu_2\,m_2) \quad ,$$

wobei die Koeffizienten wie folgt definiert sind:

$$(\tilde{\mu}_1\,\tilde{m}_1\,\tilde{\mu}_2\,\tilde{m}_2\,f''\,|\,\tilde{\nu}_1\,\tilde{n}_1\,\tilde{\nu}_2\,\tilde{n}_2) \quad := \quad (48)$$

$$\begin{cases} \delta_{\tilde{\mu}_1\,\tilde{m}_1,\,\tilde{\nu}_1\,\tilde{n}_1}\,\delta_{\tilde{\mu}_2\,\tilde{m}_2,\,\tilde{\nu}_2\,\tilde{n}_2} & \text{für } \tilde{\mu}_1\,\tilde{m}_1=\tilde{\mu}_2\,\tilde{m}_2 \\ \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\delta_{\tilde{\mu}_1\,\tilde{m}_1,\,\tilde{\nu}_1\,\tilde{n}_1}\,\delta_{\tilde{\mu}_2\,\tilde{m}_2,\,\tilde{\nu}_2\,\tilde{n}_2} + \mathrm{sgn}(f'')\,\delta_{\tilde{\mu}_1\,\tilde{m}_1,\,\tilde{\nu}_2\,\tilde{n}_2}\,\delta_{\tilde{\mu}_2\,\tilde{m}_2,\,\tilde{\nu}_1\,\tilde{n}_1}\right) & \text{für } \tilde{\mu}_1\,\tilde{m}_1<\tilde{\mu}_2\,\tilde{m}_2 \end{cases}$$

$$=: \quad (\tilde{\nu}_1\ \tilde{n}_1\ \tilde{\nu}_2\ \tilde{n}_2\ |f''\tilde{\mu}_1\ \tilde{m}_1\ \tilde{\mu}_2\ \tilde{m}_2)$$

$$\mathrm{sgn}(f'') \quad := \quad \begin{cases} +1 & \text{für} \quad f'' = [2] \\ -1 & \text{für} \quad f'' = [11] \end{cases}$$

Beweis 4.2

a) Falls $\tilde{\mu}_1\ \tilde{m}_1 = \tilde{\mu}_2\ \tilde{m}_2$, ist laut (35) nur $f'' = [2]$ möglich.
Da für den Young Operator

$$c(\tilde{\mu}_1\ \tilde{m}_1\ \tilde{\mu}_2\ \tilde{m}_2\ [2]) = \underline{1} \tag{49.a}$$

gilt, folgt aus (48) die Gleichheit beider Seiten in (47.a)

b) Falls $\tilde{\mu}_1\ \tilde{m}_1 < \tilde{\mu}_2\ \tilde{m}_2$, sind laut (35) sowohl $f'' = [2]$ als auch $f'' = [11]$ möglich. Für den Young Operator gilt dann:

$$c(\tilde{\mu}_1\ \tilde{m}_1\ \tilde{\mu}_2\ \tilde{m}_2\ f'') = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(1 + \mathrm{sgn}(f'')\ P(1,2)) \quad . \tag{49.b}$$

Aus (48) folgt dann die Gleichheit beider Seiten in (47.a) .
Über Adjungieren folgt (47.b) .⌋

Behauptung 4.3

Für ein Element der ID $D^{f''}$ mit $f'' = [2]$ bzw. $f'' = [11]$ gilt

$$D^{f''}_{\mu_1 m_1 \mu_2 m_2\ \tilde{\mu}_1 \tilde{m}_1\ \tilde{\mu}_2 \tilde{m}_2}(\hat{\varepsilon}^{-1}) = \tag{50}$$

$$\sum_{\substack{j_2\ 2 \\ \nu_1' n_1', \nu_2' n_2', \\ \tilde{\nu}_1' \tilde{n}_1', \tilde{\nu}_2' \tilde{n}_2'}} (\mu_1 m_1\ \mu_2 m_2\ f''|\nu_1' n_1'\ \nu_2' n_2')\ \hat{\varepsilon}^{-1}_{\nu_1' n_1'\ \tilde{\nu}_1' \tilde{n}_1'}\ \hat{\varepsilon}^{-1}_{\nu_2' n_2'\ \tilde{\nu}_2' \tilde{n}_2'} (\tilde{\nu}_1' \tilde{n}_1'\ \tilde{\nu}_2' \tilde{n}_2'|f''\tilde{\mu}_1 \tilde{m}_1\ \tilde{\mu}_2 \tilde{m}_2) \quad .$$

Beweis 4.3

Einsetzen der Koeffizienten (48) führt auf die Matrixdarstellungen

$$D^{[2]}(\hat{\varepsilon}^{-1}) \quad = \tag{51.a}$$

	$\tilde{\mu}_1\tilde{m}_1 \;\; \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1$	$\tilde{\mu}_1\tilde{m}_1 < \tilde{\mu}_2\tilde{m}_2$
$\mu_1 m_1 \;\; \mu_1 m_1$	$\hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_1 m_1\, \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1\, \hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_1 m_1\, \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1}}$	$\sqrt{2}\,\hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_1 m_1\, \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1\, \hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_1 m_1\, \tilde{\mu}_2\tilde{m}_2}}$
$\mu_1 m_1 < \mu_2 m_2$	$\sqrt{2}\,\hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_1 m_1\, \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1\, \hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_2 m_2\, \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1}}$	$\hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_1 m_1\, \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1\, \hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_2 m_2\, \tilde{\mu}_2\tilde{m}_2}}$
		$+\,\hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_1 m_1\, \tilde{\mu}_2\tilde{m}_2\, \hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_2 m_2\, \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1}}$,

$$D^{[11]}(\hat{\varepsilon}^{-1}) \quad = \tag{51.b}$$

	$\tilde{\mu}_1\tilde{m}_1 < \tilde{\mu}_2\tilde{m}_2$
$\mu_1 m_1 < \mu_2 m_2$	$\hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_1 m_1\, \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1\, \hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_2 m_2\, \tilde{\mu}_2\tilde{m}_2}} - \hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_1 m_1\, \tilde{\mu}_2\tilde{m}_2\, \hat{\varepsilon}^{-1}_{\mu_2 m_2\, \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1}}$.

Diese Matrizen sind identisch mit den in Ref.[15]) p. 59 für die Darstellungen $D^{[2]}$ und $D^{[11]}$ angegebenen Matrizen.

Behauptung 4.4

Die in (48) eingeführten Koeffizienten erfüllen die folgende Relation:

$$\sum_{1 \le \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1 \le \tilde{\mu}_2\tilde{m}_2 \le j_2 2} (\tilde{v}_1'\tilde{n}_1'\;\tilde{v}_2'\tilde{n}_2' | f''\,\tilde{\mu}_1\tilde{m}_1\;\tilde{\mu}_2\tilde{m}_2)(\tilde{\mu}_1\tilde{m}_1\;\tilde{\mu}_2\tilde{m}_2\, f'' | \tilde{v}_1\tilde{n}_1\;\tilde{v}_2\tilde{n}_2) \quad = \tag{52}$$

$$\frac{1}{2}(\delta_{\tilde{v}_1'\tilde{n}_1'\;\tilde{v}_1\tilde{n}_1\;\delta_{\tilde{v}_2'\tilde{n}_2'\;\tilde{v}_2\tilde{n}_2}} + \mathrm{sgn}(f'')\;\delta_{\tilde{v}_1'\tilde{n}_1'\;\tilde{v}_2\tilde{n}_2\;\delta_{\tilde{v}_2'\tilde{n}_2'\;\tilde{v}_1\tilde{n}_1}}) \quad .$$

Beweis 4.4

Einsetzen der expliziten Ausdrücke für die Koeffizienten und Ausdehnung des Summationsbereiches auf $1 \le \tilde{\mu}_1\,\tilde{m}_1 \le j_2\,2$, $1 \le \tilde{\mu}_2\,\tilde{m}_2 \le j_2\,2$ führt auf die Behauptung.

In Hinblick auf die Umformungen der rechten Seite der Gleichung (46) wurde in Behauptung 4.2 gezeigt, daß es möglich ist, die Wirkung des Young Operators durch einen Koeffizienten auszudrücken. Die Elimination der bei-

den Young Operatoren, die in dem reduzierten Matrixelement auftreten, bringt daher zwei Koeffizienten in das Spiel. In Behauptung 4.3 wurde gezeigt, daß der selbe Typ von Koeffizienten aus der Darstellung $D^{f''}$ herausgezogen werden kann. Dadurch treten zwei weitere Koeffizienten auf. Mittels Behauptung 4.4 lassen sich diese vier Koeffizienten paarweise eliminieren. Dies führt letztendlich auf das Ergebnis:

$$\sum_{\bar{q},q} D^{f''}_{q\,\bar{q}}(\hat{\varepsilon}^{-1})\,(\hat{\alpha}^2\, f''\bar{q}\,\|T(2)(\bar{t}_1,\bar{t}_2;t_1,t_2)\|\,\hat{\alpha}^2\, f''q) \qquad = \qquad (53)$$

$$\frac{a_{f''}}{2} \sum_{\substack{\bar{\nu}_1\bar{n}_1,\bar{\nu}_2\bar{n}_2\\ \nu_1 n_1,\nu_2 n_2}}^{j_2 2} \Big(\hat{\varepsilon}^{-1}_{\nu_1 n_1\ \bar{\nu}_1\bar{n}_1}\ \hat{\varepsilon}^{-1}_{\nu_2 n_2\ \bar{\nu}_2\bar{n}_2} + \mathrm{sgn}(f'')\,\hat{\varepsilon}^{-1}_{\nu_2 n_2\ \bar{\nu}_1\bar{n}_1}\ \hat{\varepsilon}^{-1}_{\nu_1 n_1\ \bar{\nu}_2\bar{n}_2}\Big)\cdot$$

$$(\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2|\Lambda_{-\bar{t}_{\bar{n}_1}-\bar{t}_{\bar{n}_2}}\circ V_{\bar{t}_{\bar{n}_1}\bar{t}_{\bar{n}_2}}\circ \tilde{T}(2)\circ\Lambda_{t_{n_1}t_{n_2}}\circ V_{\bar{t}_{n_1}\bar{t}_{n_2}}|\nu_1\nu_2)\,.$$

In der Gleichung (53) sind zwei wesentliche Punkte hervorzuheben. Zum einen ist die Symmetrieabhängigkeit verschwunden. Insbesondere müssen die Matrixelemente des Operators $\tilde{T}(2)$ nicht mehr bezüglich symmetrischen oder antisymmetrischen 2-Teilchen-Zuständen gebildet werden, sondern nur noch hinsichtlich eines einfachen Produkts von zwei 1-Teilchen-Zuständen. Zum andern tritt ein uneingeschränkter Summationsbereich von 1 1 bis j_2 2 auf. Dies wird im nächsten Abschnitt wichtig, in dem die Abhängigkeit von den sphärischen Komponenten unterdrückt werden soll.

Elimination der sphärischen Koordinaten

In Gleichung (53) treten zwei Bausteine auf. Die Elemente der inversen Überlappmatrix $\hat{\varepsilon}^{-1}$ und die 2-Teilchen-Matrixelemente des Operators $\tilde{T}(2)$ in der modifizierten Basis. Beide Bausteine tragen die Zustandsindizes $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$, ν_1, ν_2. Nun nütze ich aus, daß der Gesamtausdruck (53) für zwei Fragmente mit geschlossener Schale und mit $[L, T(2)] = 0$ aus Skalarprodukten aufgebaut sein muß. Die auftretende Summation über diese Indizes muß also gerade bewirken, daß die Bausteine so zusammengefügt werden, daß keine Abhängigkeit von sphärischen Komponenten verbleibt. Das legt nahe, die Zustände $(\bar{\nu}_1\,\bar{\nu}_2|$ und $|\nu_1\,\nu_2)$ von den 2-Teilchen-Matrixelementen abzu-

spalten, so daß eine skalare Größe entsteht. Wird dann die Summation über diese Indizes anschließend ausgeführt, wird auch der zweite Baustein ein skalarer Ausdruck. Gehe ich in dieser Weise vor, so finde ich unmittelbar

$$\sum_{q,\bar{q}} D^{f''}_{q\,\bar{q}}(\hat{\varepsilon}^{-1})\,(\hat{\alpha}^2 f''\bar{q}\,|T(2)(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2;t_1,t_2)\|\hat{\alpha}^2 f''q) \qquad = \tag{54}$$

$$\frac{a_{f''}}{2}\sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}}^{2}\int_{\}=1}\Big[(x_1|K_{n_1\tilde{n}_1}|\tilde{x}_1)(x_2|K_{n_2\tilde{n}_2}|\tilde{x}_2)+\mathrm{sgn}(f'')(x_2|K_{n_2\tilde{n}_1}|\tilde{x}_1)(x_1|K_{n_1\tilde{n}_2}|\tilde{x}_2)\Big]\cdot$$

$$(\tilde{x}_1\tilde{x}_2\,|\,\Lambda_{-t_{\tilde{n}_1},-t_{\tilde{n}_2}}\circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}}\circ\tilde{T}(2)\circ\Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}}\circ V_{\tilde{t}_{n_1},\tilde{t}_{n_2}}\,|\,x_1x_2)\;d\mu(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,x_1,x_2)$$

mit den Kernen

$$(x_i|K_{n_i\tilde{n}_j}|\tilde{x}_j):=\sum_{v_i,\tilde{v}_j}(x_i|v_i)\,\hat{\varepsilon}^{-1}_{v_i n_i\,\tilde{v}_j\tilde{n}_j}\,(\tilde{v}_j|\tilde{x}_j)\qquad . \tag{55}$$

Die Gleichung (54) hat nun folgende Struktur:

1.) Ich benötige den Kern des Operators $\tilde{T}(2)$ in der modifizierten Basis im Bargmann Raum. Dieser Kern ist i.a. ein ∞-Polynom bezüglich $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,x_1^*,x_2^*$ und im Fall von Brink-Boeker, Volkov, Coulomb, ... Wechselwirkungen grundsätzlich analytisch konstruierbar.

2.) Ferner werden die Kerne (55) benötigt, die sofort analytisch angegeben werden können, wenn die analytische Form der inversen Überlappmatrix $\hat{\varepsilon}^{-1}$ bekannt ist. Diese Kerne sind Polynome in x_i und $\tilde{x}_j^*$. Aber dadurch, daß die Zustände

$$(\tilde{v}_1\,\tilde{v}_2\,|\qquad,\qquad|v_1\,v_2)$$

abgetrennt wurden, und nicht etwa die Zustände

$$\big(\tilde{v}_1\,\tilde{v}_2\,\big|\,\Lambda_{-t_{\tilde{n}_1},-t_{\tilde{n}_2}}\circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}}\qquad,$$

$$\Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}}\circ V_{\tilde{t}_{n_1},\tilde{t}_{n_2}}\,\big|\,v_1\,v_2\big)\qquad,$$

haben die so entstandenen und in (55) definierten Kerne eine ganz besondere Eigenschaft. Die Potenz, mit der x_i bzw. $\tilde{x}_j^*$ auftreten, kann nicht größer sein als die maximale Oszillatorquantenzahl der Zustände. Konkret bedeutet das für die Kollision zweier α-Teilchen, die nur s-Zustände aufweisen, daß diese Kerne Polynome 0-ten Grades in x_i und $\tilde{x}_j^*$ sind. In der Kollision zweier ^{16}O-Cluster treten nur s- und p-Zustände auf, d.h. die Kerne (55) sind lediglich Polynome ersten Grades in x_i bzw. $\tilde{x}_j^*$. Grundsätzlich gilt also, daß die Kerne (55) Polynome endlichen Grades sind.

3.) Es ist eine Integration über $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_1, x_2$ im Bargmann Raum durchzuführen. Für diese Integration gilt für ein $x_{i_k} \in \mathbb{C}$

$$\int \frac{x_{i_k}^{*\nu}\, x_{i_k}^{\rho}}{\sqrt{\nu!}\,\sqrt{\rho!}}\, d\mu(x_{i_k}) = \delta_{\nu\rho} \tag{56}$$

Hieraus folgt sofort, daß das ∞-Polynom des Kerns des Operators $\tilde{T}(2)$ in der modifizierten Basis im Bargmann Raum nur bis zu dem durch die Kerne (55) vorgegebenen Grad in x_i bzw. $\tilde{x}_j^*$ bekannt sein muß. Der Rest des ∞-Polynoms trägt überhaupt nichts bei. Für α+α heißt das, daß der Kern nur bis zum 0-ten Grad in $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_1^*, x_2^*$ bekannt sein muß oder zum Beispiel für ^{16}O + ^{16}O nur bis zum ersten Grad.

An dieser Stelle wird auch ganz besonders deutlich, worin der Vorteil der Formulierung im Bargmann Raum liegt. Die Kerne lassen sich leicht konstruieren und die auftretende Integration ist trivial.

4.) Die verbleibende Summation erstreckt sich nur noch über die Clusterindizes in bra bzw. ket. Das gibt 4 x 4 Beiträge, je nach dem, welches der beiden wechselwirkenden Teilchen sich in welchem Cluster befindet. Sind die beiden Cluster identisch, vereinfacht sich die Summation sehr stark da einzelne Beiträge identisch sind.

Grundformel des neuen Konzepts

Setze ich nun die Beziehung (54) in (39) ein und gehe mit diesem Ergebnis in die Gleichung (30), so ergibt sich für den Wechselwirkungsintegralkern des Operators $\mathcal{O}$:

$$\left((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\;\middle|\,\mathcal{O}(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2\,;t_1,t_2)\,\middle|\;(\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\right) =$$

$$\frac{\binom{4j}{2}}{2\,|[4^j]|}\,(\det(\hat{\varepsilon}))^4 \sum_{f''=[2],[11]} \frac{|f''^{c}|\,a_{f''}}{\dim(f'';j)} \sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}\}=1}^{2} \int d\mu(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,x_1,x_2)\cdot$$

$$\left[(x_1|K_{n_1\tilde{n}_1}|\tilde{x}_1)(x_2|K_{n_2\tilde{n}_2}|\tilde{x}_2) + \mathrm{sgn}(f'')(x_2|K_{n_2\tilde{n}_1}|\tilde{x}_1)(x_1|K_{n_1\tilde{n}_2}|\tilde{x}_2)\right]\cdot$$

$$(\tilde{x}_1\tilde{x}_2\,|\,\Lambda_{-t_{\tilde{n}_1},-t_{\tilde{n}_2}}\circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}}\circ\tilde{T}(2)\circ\Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}}\circ V_{\tilde{t}_{n_1},\tilde{t}_{n_2}}\,|\,x_1x_2)$$

$$=$$

$$\frac{\binom{4j}{2}}{2\,|[4^j]|}\,(\det(\hat{\varepsilon}))^4 \sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}\}=1}^{2} \int d\mu(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,x_1,x_2)\cdot \tag{57}$$

$$\left[\left(\frac{|[4^{j-1}2]|\,a_{[2]}}{\dim([2],j)} + \frac{|[4^{j-2}33]|\,a_{[11]}}{\dim([11],j)}\right)(x_1|K_{n_1\tilde{n}_1}|\tilde{x}_1)(x_2|K_{n_2\tilde{n}_2}|\tilde{x}_2) +\right.$$

$$\left.\left(\frac{|[4^{j-1}2]|\,a_{[2]}}{\dim([2],j)} - \frac{|[4^{j-2}33]|\,a_{[11]}}{\dim([11],j)}\right)(x_2|K_{n_2\tilde{n}_1}|\tilde{x}_1)(x_1|K_{n_1\tilde{n}_2}|\tilde{x}_2)\right]\cdot$$

$$(\tilde{x}_1\tilde{x}_2\,|\,\Lambda_{-t_{\tilde{n}_1},-t_{\tilde{n}_2}}\circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}}\circ\tilde{T}(2)\circ\Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}}\circ V_{\tilde{t}_{n_1},\tilde{t}_{n_2}}\,|\,x_1x_2)$$

Benutze ich nun die in Ref. [15]) angegebenen Formeln zur Berechnung der Dimension einer ID der symmetrischen Gruppe S(A) bzw. der allgemeinen linearen Gruppe Gl(j, C), so ergibt sich

$$\|[4^j]\| = \frac{(4j)!}{(j!)^4} \; \frac{12}{(j+1)^3\,(j+2)^2\,(j+3)} \quad , \tag{58}$$

$$\|[4^{j-1}2]\| = \frac{(4j)!}{(j!)^4} \; \frac{18}{(j+1)^2\,(j+2)^2\,(j+3)\,(4j-1)} \quad ,$$

$$\|[4^{j-2}33]\| = \frac{(4j)!}{(j!)^4} \; \frac{30\,(j-1)}{(j+1)^3\,(j+2)^2\,(j+3)\,(4j-1)} \quad ,$$

$$\dim([2], j) = \frac{j(j+1)}{2} \quad ,$$

$$\dim([11], j) = \frac{j(j-1)}{2} \quad .$$

Durch diese Beziehungen läßt sich die Gleichung (57) auf die folgende Form bringen:

$$\left((a\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\;\left|\mathcal{O}(\bar{t}_1,\bar{t}_2\,;t_1,t_2)\right|\;(a\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\right) = \tag{59}$$

$$(\det(\hat{\varepsilon}))^4 \sum_{\substack{\bar{n}_1,\bar{n}_2,\\ n_1,n_2}}^{2} \Bigg\} = 1 \int d\mu(\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_1,x_2) \Big[(3a_{[2]}+5a_{[11]})(x_1|K_{n_1\bar{n}_1}|\bar{x}_1)(x_2|K_{n_2\bar{n}_2}|\bar{x}_2)$$

$$+(3a_{[2]}-5a_{[11]})(x_2|K_{n_2\bar{n}_1}|\bar{x}_1)(x_1|K_{n_1\bar{n}_2}|\bar{x}_2)\Big]$$

$$(\bar{x}_1\bar{x}_2\,|\,\Lambda_{-t_{\bar{n}_1},-t_{\bar{n}_2}} \circ V_{-\bar{t}_{\bar{n}_1},-\bar{t}_{\bar{n}_2}} \circ \bar{T}(2) \circ \Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}} \circ V_{\bar{t}_{n_1},\bar{t}_{n_2}}\,|\,x_1x_2)$$

In einem weiteren Schritt wird nun noch der modifizierte Kern des Operators $\tilde{T}(2)$ im Bargmann Raum auf einen einfachen Kern reduziert.

Behauptung 4.5

$$\langle (\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \mid \Lambda_{-t_{\tilde{n}_1},-t_{\tilde{n}_2}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}} \circ \tilde{T}(2) \circ \Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}} \circ V_{\tilde{t}_{n_1},\tilde{t}_{n_2}} \mid x_1x_2) \quad = \tag{60}$$

$$\tilde{T}(2)(\tilde{x}_1+\tilde{t}_{\tilde{n}_1},\tilde{x}_2+\tilde{t}_{\tilde{n}_2};x_1+t_{n_1},x_2+t_{n_2}) \exp\left(-\tilde{x}_1\tilde{t}^*_{\tilde{n}_1}-\tilde{x}_2\tilde{t}^*_{\tilde{n}_2}-x_1^*\tilde{t}_{n_1}-x_2^*\tilde{t}_{n_2}\right) .$$

Beweis 4.5

Nach dem Einschieben von Zuständen $|f)$ eines vollständigen Orthonormalsystems gilt für die linke Seite der Behauptung: $=$

$$\sum_{\tilde{f},f} (\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \mid \Lambda_{-t_{\tilde{n}_1},-t_{\tilde{n}_2}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}} \mid \tilde{f})(\tilde{f} \mid \tilde{T}(2) \mid f)(f \mid \Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}} \circ V_{\tilde{t}_{n_1},\tilde{t}_{n_2}} \mid x_1x_2) .$$

Laut (26) gilt:

$$(\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \mid \Lambda_{-t_{\tilde{n}_1},-t_{\tilde{n}_2}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}} \mid \tilde{f}) = \Lambda_{-t_{\tilde{n}_1},-t_{\tilde{n}_2}} (V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}} \tilde{f})(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$$

$$= \exp(-t^*_{\tilde{n}_1}\cdot\tilde{x}_1-t^*_{\tilde{n}_2}\cdot\tilde{x}_2)\, \tilde{f}(\tilde{x}_1+\tilde{t}_{\tilde{n}_1},\tilde{x}_2+\tilde{t}_{\tilde{n}_2}),$$

$$(f \mid \Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}} \circ V_{\tilde{t}_{n_1},\tilde{t}_{n_2}} \mid x_1x_2) = \left[\Lambda_{-\tilde{t}_{n_1},-\tilde{t}_{n_2}} (V_{-t_{n_1},-t_{n_2}} f)(x_1,x_2)\right]^*$$

$$= \exp(-x_1^*\tilde{t}_{n_1}-x_2^*\tilde{t}_{n_2})\, f^*(x_1+t_{n_1},x_2+t_{n_2}).$$

Einsetzen ergibt:

$$\sum_{\tilde{f},f} (\tilde{x}_1+\tilde{t}_{\tilde{n}_1}\ \tilde{x}_2+\tilde{t}_{\tilde{n}_2} \mid \tilde{f})(\tilde{f} \mid \tilde{T}(2) \mid f)(f \mid x_1+t_{n_1}\ x_2+t_{n_2}) \exp(-\tilde{x}_1t^*_{\tilde{n}_1}-\tilde{x}_2t^*_{\tilde{n}_2}-x_1^*\tilde{t}_{n_1}-x_2^*\tilde{t}_{n_2})$$

$$= (\tilde{x}_1-\tilde{t}_{\tilde{n}_1}\ \tilde{x}_2+\tilde{t}_{\tilde{n}_2} \mid \tilde{T}(2) \mid x_1+t_{n_1}\ x_2+t_{n_2}) \exp(-\tilde{x}_1t^*_{\tilde{n}_1}-\tilde{x}_2t^*_{\tilde{n}_2}-x_1^*\tilde{t}_{n_1}-x_2^*\tilde{t}_{n_2}) .$$

Wird (60) in (59) eingesetzt, ergibt sich die Grundformel des neuen Konzepts:

$$\left((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\;\middle|\,\mathcal{O}(\bar{t}_1,\bar{t}_2\,;t_1,t_2)\,\middle|\;(\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\right) = \tag{61}$$

$$\left(\det(\hat{\epsilon})\right)^4 \sum_{\substack{\bar{n}_1,\bar{n}_2,\\ n_1,n_2}}^{2} \Bigg\} = 1 \int d\mu(\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_1,x_2)\,\Big[(3a_{[2]}+5a_{[11]})(x_1|K_{n_1\bar{n}_1}|\bar{x}_1)(x_2|K_{n_2\bar{n}_2}|\bar{x}_2)$$

$$+(3a_{[2]}-5a_{[11]})(x_2|K_{n_2\bar{n}_1}|\bar{x}_1)(x_1|K_{n_1\bar{n}_2}|\bar{x}_2)\Big]$$

$$\cdot\,\bar{T}(2)(\bar{x}_1+\bar{t}_{\bar{n}_1},\bar{x}_2+\bar{t}_{\bar{n}_2};x_1+t_{n_1},x_2+t_{n_2})\;\exp\left(-\bar{x}_1\bar{t}^{*}_{\bar{n}_1}-\bar{x}_2\bar{t}^{*}_{\bar{n}_2}-x_1^{*}\bar{t}_{n_1}-x_2^{*}\bar{t}_{n_2}\right)$$

Mit dieser Formel (61) ist nun die Entwicklung des Konzepts abgeschlossen. Diese Formel erlaubt, auf analytischem Wege die Integralkerne des Operators $\mathcal{O}$ für die Kollision zweier Fragmente mit geschlossenen Schalen zu berechnen . Ich möchte dabei ganz besonders hervorheben, daß in dieser Methode die in (31) noch auftretenden 2-Teilchen-Matrixelemente nicht mehr erforderlich sind, sondern lediglich sehr einfach konstruierbare Kerne. Außerdem ist die Formulierung sehr allgemein, so daß darauf aufgebaut werden kann, die Beschreibung auf die Kollision zweier Fragmente mit der Konfiguration $[4^j]$, $j = 2, 3, 4\ldots$, also auf die Kollision zweier Fragmente mit offenen Schalen, auszudehnen. Doch bevor ich zu Anwendungen übergehe und (61) noch weiter vereinfache, möchte ich einen Abschnitt über Kerne im Bargmann Raum einschieben.

Teil B :
Kerne im Bargmann Raum

Es ist nicht das Ziel dieses Abschnitts, die Methoden zu diskutieren, die zur Berechnung von Kernen im Bargmann Raum verwendet werden können. Diese Methoden sind anderswo hinlänglich erörtert [118,119]) und kompakt zusammengefaßt [15]) worden.

Hier sollen lediglich für die Operatoren, die in der mikroskopischen Rechnung eine Rolle spielen werden, die entsprechenden Kerne im Bargmann Raum angegeben werden. Ein Ziel soll dabei sein, bei zugrunde legen einer Kernkraft Gauß'schen Typs (Volkov, Brink-Boeker, ...), der relativkinetischen Energie und der Coulomb Wechselwirkung die Berechnung des Integralkerns auf ein Standardproblem zurückzuführen. Dieses Standardproblem wird darin bestehen, für eine Gauß Wechselwirkung mittels (61) den Beitrag zum Wechselwirkungsintegralkern zu berechnen. Aus diesem Beitrag wird dann der vollständige Integralkern konstruiert. Unabhängig davon können aber, wenn die Kerne für die einzelnen Kräfte explizit bekannt sind, über die Gleichung (61) die Beiträge dieser einzelnen Kräfte auch direkt berechnet werden. Die Ausführungen in diesem Teil B sind allgemein gültig und nicht an eine bestimmte Kollision gebunden, denn die Information über die jeweiligen Kollisionspartner steckt in den in der Grundformel (61) auftretenden Kernen (55) und nicht in den Kernen des Wechselwirkungsoperators $\tilde{T}(2)$.

Gauß Wechselwirkung

Wenn eine Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung vorausgesetzt wird, die durch eine Überlagerung von Operatoren der Form (45) dargestellt werden kann, und der Kern von $\tilde{T}(2)$ vom Typ einer Gauß Wechselwirkung ist, so läßt sich das Problem auf den Kern einer Gauß Wechselwirkung

$$\tilde{T}_G(2)(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2; r_1 r_2) = \exp\left\{-\left(\frac{r_1 - r_2}{a}\right)^2\right\} \delta(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2, r_1 - r_2)\ \delta(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2, r_1 + r_2) \tag{62.a}$$

im Hilbert Raum reduzieren ($a \in \mathbb{R}$).

Werden zwecks der Transformation in den Bargmann Raum die dimensionslosen Größen

$$\xi_i := \frac{r_i}{b} \qquad i = 1,2 ; \tag{63}$$

eingeführt, mit

$$b := \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad , \qquad \gamma := \frac{4\,b^2}{a^2} \tag{64}$$

so gilt

(62.b)

$$\tilde{T}_G^{(2)}(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2;\xi_1,\xi_2) = \exp\left\{-\frac{\gamma}{4}(\xi_1-\xi_2)^2\right\}\delta(\tilde{\xi}_1-\tilde{\xi}_2,\,\xi_1-\xi_2)\,\delta(\tilde{\xi}_1+\tilde{\xi}_2,\,\xi_1+\xi_2).$$

Die Bargmann Integraltransformation [118] (oder siehe Ref. [15]) führt den Kern (62.a) über in den Kern im Bargmann Raum:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_G^{(2)}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2;x_1,x_2) = \sqrt{(2p)^3}\,\exp\Big\{ & q\,(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)^2 \\ & + q\,(x_1^*-x_2^*)^2 \\ & + p\,(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)(x_1^*-x_2^*) \\ & + \tfrac{1}{2}\,(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2)(x_1^*+x_2^*)\Big\} \quad ,\end{aligned} \tag{65}$$

$$q := -\frac{\gamma}{4(2+\gamma)} \quad ,$$

$$p := \frac{1}{2+\gamma} \quad .$$

Aus der Gleichung (65) folgt unmittelbar für den in der Gleichung (61) auftretenden Ausdruck

(66.a)

$$\tilde{T}_G^{(2)}(\tilde{x}_1+\tilde{t}_{\tilde{n}_1},\tilde{x}_2+\tilde{t}_{\tilde{n}_2};x_1+t_{n_1},x_2+t_{n_2})\exp\left\{-\tilde{x}_1\cdot\tilde{t}^*_{\tilde{n}_1}-\tilde{x}_2\cdot\tilde{t}^*_{\tilde{n}_2}-x_1^*\cdot\tilde{t}_{n_1}-x_2^*\cdot\tilde{t}_{n_2}\right\} =$$

$$Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2}\,\exp\left\{\tilde{x}_1\cdot\tilde{b}_1^*+\tilde{x}_2\cdot\tilde{b}_2^*+x_1^*\cdot\tilde{b}_1+x_2^*\cdot\tilde{b}_2\right\}$$

$$\cdot\,\exp\left\{\lambda_+(\tilde{x}_1\cdot x_1^*+\tilde{x}_2\cdot x_2^*)-\lambda_-(\tilde{x}_1\cdot x_2^*+\tilde{x}_2\cdot x_1^*)+q(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)^2+q(x_1^*-x_2^*)^2\right\} \quad ,$$

$$Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2} := \exp\left\{\tilde{t}_{\tilde{n}_1}\cdot t^*_{n_1}+\tilde{t}_{\tilde{n}_2}\cdot t^*_{n_2}\right\}\,Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2}(\tilde{t}\cdot t^*,\tilde{t}\cdot\tilde{t},t^*\cdot t^*) \quad , \tag{66.b}$$

$$Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2}(\tilde{t}\cdot t^*,\tilde{t}\cdot\tilde{t},t^*\cdot t^*) := \sqrt{(2p)^3}\,\exp\left\{\lambda_-(\tilde{t}_{\tilde{n}_1}-\tilde{t}_{\tilde{n}_2})(t^*_{n_1}-t^*_{n_2})\right.$$

$$\left.+\,q(\tilde{t}_{\tilde{n}_1}-\tilde{t}_{\tilde{n}_2})^2+q(t^*_{n_1}-t^*_{n_2})^2\right\} \quad ,$$

$$\lambda_{\pm} := p \pm \frac{1}{2} \quad , \tag{66.c}$$

$$b_1^* \equiv b^*_{1\,\bar{n}_1\bar{n}_2 n_1 n_2} := t^*_{n_1} - t^*_{\bar{n}_1} + \lambda_-(t^*_{n_1} - t^*_{n_2}) + 2q(\tilde{t}_{\bar{n}_1} - \tilde{t}_{\bar{n}_2}) \quad , \tag{66.d}$$

$$b_2^* \equiv b^*_{2\,\bar{n}_1\bar{n}_2 n_1 n_2} := t^*_{n_2} - t^*_{\bar{n}_2} - \lambda(t^*_{n_1} - t^*_{n_2}) - 2q(\tilde{t}_{\bar{n}_1} - \tilde{t}_{\bar{n}_2}) \quad ,$$

$$\tilde{b}_1 \equiv \tilde{b}_{1\,\bar{n}_1\bar{n}_2 n_1 n_2} := \tilde{t}_{\bar{n}_1} - \tilde{t}_{n_1} + \lambda_-(\tilde{t}_{\bar{n}_1} - \tilde{t}_{\bar{n}_2}) + 2q(t^*_{n_1} - t^*_{n_2}) \quad ,$$

$$\tilde{b}_2 \equiv \tilde{b}_{2\,\bar{n}_1\bar{n}_2 n_1 n_2} := \tilde{t}_{\bar{n}_2} - \tilde{t}_{n_2} - \lambda_-(\tilde{t}_{\bar{n}_1} - \tilde{t}_{\bar{n}_2}) - 2q(t^*_{n_1} - t^*_{n_2}) \quad ,$$

$$t := t_1 - t_2 \quad , \qquad \tilde{t} := \tilde{t}_1 - \tilde{t}_2 \quad .$$

Relativkinetische Energieoperator

Der relativkinetische Energieoperator T_{rel} kann auch als 2-Teilchen-Operator geschrieben werden. Aus

$$T = T_{rel} + T_S \tag{67}$$

mit

$$T = \sum_{s=1}^{A} \frac{P_s^2}{2m} \quad , \qquad T_S = \frac{1}{2A\,m}\left(\sum_{s=1}^{A} P_s\right)^2 \tag{68}$$

folgt

$$T_{rel} = \frac{1}{2A\,m} \sum_{s<t} (P_s - P_t)^2 = \sum_{s<t} T_{rel}(s,t) \quad , \tag{69}$$

mit dem 2-Teilchen-Operator

$$T_{rel}(s,t) = \frac{(P_s - P_t)^2}{2A\,m} \quad . \tag{70.a}$$

Werden die dimensionslosen Operatoren

$$\Pi_s = \frac{P_s}{\sqrt{m\omega\hbar}} \tag{71}$$

eingeführt, so kann der Operator

$$T_{rel}(s,t) = \frac{\omega\hbar}{2A}\,(\Pi_s - \Pi_t)^2 \tag{70.b}$$

schließlich auf die Form

$$T_{rel}(s,t) = -\frac{2\hbar\omega}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}\exp\left\{-\frac{\beta}{2}\left(\frac{\Pi_s-\Pi_t}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}\Bigg|_{\beta=0} \tag{72}$$

gebracht werden.

Basierend auf Ref. [119]) (siehe auch Ref. [15])) läßt sich der Kern des Operators $T_{rel}(2) \equiv \tilde{T}_{rel}(2)$ (d.h. $a_{[2]} = a_{[11]} = 1$) im Bargmann Raum berechnen;

$$\begin{aligned} T_{rel}(2)(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2;x_1x_2) = -\frac{2\hbar\omega}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\left(\frac{2}{2+\beta}\right)^3}\exp\Big\{ & \frac{\beta}{4(2+\beta)}(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)^2 \\ & + \frac{\beta}{4(2+\beta)}(x_1^*-x_2^*)^2 \\ & + \frac{1}{(2+\beta)}(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)(x_1^*-x_2^*) \\ & + \frac{1}{2}\,(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)(x_1^*-x_2^*)\Big\}\Bigg|_{\beta=0}. \end{aligned} \tag{73}$$

Ein Vergleich der beiden Gleichungen (65) und (73) zeigt sofort, daß der Kern des relativkinetischen Energieoperators (73) aus dem Kern der Gauß Wechselwirkung (65) gewonnen werden kann, wenn folgendermaßen verfahren wird :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & q \longrightarrow -q\ , \\ \text{(ii)} & \dfrac{-2\hbar\omega}{A}\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\cdots\Big|_{\gamma=0} \end{array}\right\} \equiv -\frac{2\hbar\omega}{A}\frac{\partial}{\partial\gamma}\,\cdots\Big|_{q\longrightarrow -q}\Big|_{\gamma=0} \tag{74}$$

d.h., wenn q durch -q ersetzt und dann die Operation (ii) durchgeführt wird. Eine andere Möglichkeit wäre gewesen, den Operator in (70.b) durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Bargmann Raum auszudrücken und zwischen Kohärenzzuständen auszuwerten (in Analogie zum Beispiel 4.5 in Ref. [15])). Auf diesem Wege ist es sehr einfach, zu dem Ausdruck

$$T_{rel}(2)(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2;x_1x_2) = -\frac{\hbar\omega}{4A}\left[\left((\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)-(x_1^*-x_2^*)\right)^2 - 6\right]\exp(\tilde{x}_1x_1^* + \tilde{x}_2x_2^*) \tag{75}$$

zu gelangen, der selbstverständlich identisch mit der Gleichung (73) sein muß. Mittels (75) kann nun der in der Formel (61) auftretende Ausdruck für den relativkinetischen Energieoperator explizit angegeben werden:

(76)

$$T_{rel}^{(2)}(\tilde{x}_1+\tilde{t}_{\tilde{n}_1}, \tilde{x}_2+\tilde{t}_{\tilde{n}_2}; x_1+t_{n_1}, x_2+t_{n_2}) \exp(-\tilde{x}_1 t^*_{\tilde{n}_1} - \tilde{x}_2 t^*_{\tilde{n}_2} - x^*_1 \tilde{t}_{n_1} - x^*_2 \tilde{t}_{n_2})$$

$$= - \frac{\omega\hbar}{4A} \left[((\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)-(x^*_1-x^*_2)+d)^2 - 6 \right] \exp\left\{ +\tilde{x}_1 c^*_1 + \tilde{x}_2 c^*_2 + x^*_1 \tilde{c}_1 + x^*_2 \tilde{c}_2 \right\}$$

$$\exp\left\{ +\tilde{x}_1 x^*_1 + \tilde{x}_2 x^*_2 + \tilde{t}_{\tilde{n}_1} t^*_{n_1} + \tilde{t}_{\tilde{n}_2} t^*_{n_2} \right\} \quad ,$$

$$c^*_1 \equiv c^*_{\tilde{n}_1 n_1} := -t^*_{\tilde{n}_1} + t^*_{n_1} \quad , \qquad d \equiv d_{\tilde{n}_1 \tilde{n}_2 n_1 n_2} := (\tilde{t}_{\tilde{n}_1} - \tilde{t}_{\tilde{n}_2}) - (t^*_{n_1} - t^*_{n_2}) \quad ,$$

$$c^*_2 \equiv c^*_{\tilde{n}_2 n_2} := -t^*_{\tilde{n}_2} + t^*_{n_2} \quad ,$$

$$\tilde{c}_1 \equiv \tilde{c}_{\tilde{n}_1 n_1} := \tilde{t}_{\tilde{n}_1} - \tilde{t}_{n_1} \quad ,$$

$$\tilde{c}_2 \equiv \tilde{c}_{\tilde{n}_2 n_2} := \tilde{t}_{\tilde{n}_2} - \tilde{t}_{n_2} \quad .$$

Andererseits kann dieses Ergebnis (76) auch durch die Anwendung der Prozedur (74) auf die Gleichung (66.a) gewonnen werden.

Coulomb Wechselwirkung

Die Wirkung des mikroskopischen Coulomb Wechselwirkungsoperators

$$O_C = \sum_{s<t} T(s,t)\ U(s,t) \quad , \tag{77}$$

$$T(s,t) = \frac{e^2}{|r_s - r_t|} \quad , \tag{9.a}$$

$$U(s,t) = (\tfrac{1}{2} + \tau^s_3)\ (\tfrac{1}{2} + \tau^t_3) \tag{9.b}$$

kann gemäß (9.a) - (9.c) im Falle der Konfiguration $f = [4^j]$ durch den Operator

$$O_C = \sum_{s<t} T_C(s,t) \quad , \tag{78.a}$$

$$T_C(s,t) = \tilde{T}_C(s,t) \sum_{f''} a_{f''} P_{f''}(s,t) \quad , \tag{78.b}$$

$$\tilde{T}_C(s,t) \equiv T(s,t) \tag{78.c}$$

wiedergegeben werden. Dabei wird ausgenutzt, daß die Wirkung des Spin-Isospin-Operators (9.b) auf diese Konfigurationen unter Einführung von Symmetriewichtungsfaktoren auch durch die Wirkung eines Ortsoperators erzielt werden kann. Mit (78.b) wird formal die Gleichung (45) reproduziert. Die Symmetriekoeffizienten $a_{f''}$ sind für die Coulomb Wechselwirkung in (9.c) festgelegt. Unter diesen Gegebenheiten ist ebenfalls die Gleichung (61) die Ausgangsbasis. Der Kern des Operators $T(A-1,A) \equiv T(2)$ im Hilbert Raum hat die Gestalt :

$$\tilde{T}_C^{(2)}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2; r_1, r_2) = \frac{e^2}{|r_1 - r_2|} \delta(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2, r_1 - r_2) \quad \delta(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2, r_1 + r_2) \quad . \tag{79}$$

Bereits bezogen auf die dimensionslosen Größen (63) kann dieser Kern auch wie folgt ausgedrückt werden :

$$T_C^{(2)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2; \xi_1, \xi_2) = \frac{e^2 2}{b\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty d\varepsilon \, \exp\left\{ - \varepsilon^2 (\xi_1 - \xi_2)^2 \right\} \cdot \tag{80}$$

$$\delta(\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2, \xi_1 - \xi_2) \, \delta(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2, \xi_1 + \xi_2) \quad .$$

Da für den Kern (62.b) der entsprechende Kern (65) im Bargmann Raum bereits bekannt ist, läßt sich sofort das Ergebnis der Transformation des Kerns (80) in den Bargmann Raum angeben; (81)

$$T_C^{(2)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2; x_1, x_2) = \frac{e^2 2}{b\sqrt{\pi}} \, C \int_0^\infty \sqrt{\left(\frac{1}{1+2\varepsilon^2}\right)^3} \quad A^{\frac{\varepsilon^2}{2+4\varepsilon^2}} \quad B^{\frac{1}{2+4\varepsilon^2}} \, d\varepsilon,$$

$$C := \exp\left(\frac{1}{2} (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)(x_1^* + x_2^*)\right) \quad ,$$

$$A := \exp(-(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)^2 - (x_1^*-x_2^*)^2) \quad ,$$

$$B := \exp((\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)(x_1^*-x_2^*)) \quad .$$

Die Substitution

$$\varphi = \frac{1}{1+2\varepsilon^2} \tag{82}$$

führt auf ein Integral mit endlichen Grenzen

$$T_C^{(2)}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2;x_1,x_2) = \frac{e^2}{b\sqrt{2\pi}}\; C\; A^{\frac{1}{4}} \int_0^1 \frac{\exp(\alpha\varphi)}{\sqrt{1-\varphi}}\, d\varphi \quad , \tag{83}$$

$$\alpha := \frac{1}{4}(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2+x_1^*-x_2^*)^2 \quad .$$

Es gibt verschiedene Wege, dieses Integral zu lösen. Die einfachste Endformel scheint (84)

$$T_C^{(2)}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2;x_1,x_2) = \frac{e^2}{b\sqrt{2\pi}}\exp(\tilde{x}_1x_1^*+\tilde{x}_2x_2^*)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\tilde{x}_1-\tilde{x}_2}{2}+\frac{x_1^*-x_2^*}{2}\right)^{2n}$$

zu sein. Ein Vergleich der beiden Formeln (65) und (83) zeigt, daß der Kern (83) auch dadurch entsteht, daß in (65)

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \sqrt{(2p)^3} \longrightarrow 1 \quad , \\ &\text{(ii)} \quad \Upsilon \longrightarrow 2\,\frac{1-\varphi}{\varphi} \quad , \\ &\text{(iii)} \quad \frac{e^2}{b\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \cdots \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi}} \end{aligned} \tag{85}$$

der Vorfaktor $\sqrt{(2p)^3}$ durch 1 und anschließend Υ gemäß der Vorschrift (ii) ersetzt wird. Wird dann anschließend die Operation (iii) durchgeführt, so entsteht der Kern des Orbitanteils der Coulomb Wechselwirkung im Bargmann Raum. Für den in der Grundformel (61) auftretenden Ausdruck ergibt sich aus (84) für die Coulomb Wechselwirkung :

$$T_C^{(2)}(\bar{x}_1+\bar{t}_{\bar{n}_1}, \bar{x}_2+\bar{t}_{\bar{n}_2}; x_1+t_{n_1}, x_2+t_{n_2}) \exp(-\bar{x}_1 t^*_{\bar{n}_1} - \bar{x}_2 t^*_{\bar{n}_2} - x_1^* \bar{t}_{n_1} - x_2^* \bar{t}_{n_2})$$

$$= \frac{e^2}{b\sqrt{2\pi}} \exp(+\bar{x}_1 c_1^* + \bar{x}_2 c_2^* + x_1^* \bar{c}_1 + x_2^* \bar{c}_2)$$

$$\exp(+\bar{x}_1 x_1^* + \bar{x}_2 x_2^* + \bar{t}_{\bar{n}_1} t^*_{n_1} + \bar{t}_{\bar{n}_2} t^*_{n_2}) \qquad (86)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+\frac{1}{2})\,2^{2n}} \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + x_1^* - x_2^* + f)^{2n} \quad ,$$

$$f \equiv f_{\bar{n}_1 \bar{n}_2 n_1 n_2} := \bar{t}_{\bar{n}_1} - \bar{t}_{\bar{n}_2} + t^*_{n_1} - t^*_{n_2} \quad .$$

Eine andere Möglichkeit, dieses Ergebnis zu erhalten, besteht darin, die Prozedur (85) auf (66.1) anzuwenden.

Teil C :
Allgemeine Zusammenhänge
– Vereinfachungen –

Aus rechentechnischen Gründen möchte ich zum Schluß noch auf Eigenschaften der Formeln (59) bzw. (61) hinweisen. In diesen Formeln tritt eine Summation über die Clusterindizes $\bar{n}_1, \bar{n}_2, n_1, n_2$ auf. Da jeder Index die Werte 1 bzw. 2 annehmen kann, treten insgesamt 16 Summanden auf, aber manche davon sind identisch oder auf einfache Weise miteinander verknüpft.

Behauptung 4.6

Man denke sich die 16 Summanden durch Buchstaben gekennzeichnet. Gleiche Buchstaben repräsentieren identische Summanden. Ist ein Summand durch x gekennzeichnet, so repräsentiert das Symbol $\bar{x}^*$ einen Summanden, der aus x entsteht, indem t_i^* und $\bar{t}_i$ (i = 1, 2) vertauscht werden. Werden diese 16 Summanden in ein mit $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ und n_1, n_2 indiziertes Raster eingetragen, so ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den Summanden:

$\tilde{n}_1\tilde{n}_2$ \ n_1n_2	11	12	21	22
11	a	b	b	c
12	$\tilde{b}^*$	e	f	g
21	$\tilde{b}^*$	f	e	g
22	$\tilde{c}^*$	$\tilde{g}^*$	$\tilde{g}^*$	j

(87.a)

mit den weiteren Eigenschaften

$$a = \tilde{a}^*, \quad e = \tilde{e}^*, \quad f = \tilde{f}^*, \quad j = \tilde{j}^* \quad . \tag{87.b}$$

Beweis 4.6

Es genügt, diese Zusammenhänge an Hand von (59) (oder (61)) für den Fall der Gauß Wechselwirkung (66.a) zu untersuchen; denn die Prozeduren (74) bzw. (85), mittels denen die Kerne (76) bzw. (86) von (66.a) abgeleitet werden können, lassen sich vor das Integral in (59) ziehen. Die im Fall der Gauß Wechselwirkung abgeleiteten Beziehungen zwischen den Summanden werden durch diese Prozeduren nicht zerstört. Daher gelten diese Eigenschaften auch im Falle des relativkinetischen Energieoperators und der Coulomb Wechselwirkung.

(i) Ich lege also zweckmäßiger Weise (59) für $\tilde{T}(2) \equiv \tilde{T}_G(2)$ zugrunde. Da aus (66.b) und (66.d)

$$Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2n_1n_2} = Q_{\tilde{n}_2\tilde{n}_1n_2n_1} \quad , \tag{88}$$

$$b^*_{2\,\tilde{n}_1\tilde{n}_2n_1n_2} = b^*_{1\,\tilde{n}_2\tilde{n}_1n_2n_1} \quad , \qquad \tilde{b}_{2\,\tilde{n}_1\tilde{n}_2n_1n_2} = \tilde{b}_{1\,\tilde{n}_2\tilde{n}_1n_2n_1}$$

folgt, gilt laut (66.a) ((60) ist zu beachten)

(89)

$$(\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \,|\, \Lambda_{-t_{\tilde{n}_2},-t_{\tilde{n}_1}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_2},-\tilde{t}_{\tilde{n}_1}} \circ \tilde{T}_G(2) \circ \Lambda_{t_{n_2},t_{n_1}} \circ V_{\tilde{t}_{n_2},\tilde{t}_{n_1}} \,|\, x_1x_2) =$$

$$(\tilde{x}_2\tilde{x}_1 \,|\, \Lambda_{-t_{\tilde{n}_1},-t_{\tilde{n}_2}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}} \circ \tilde{T}_G(2) \circ \Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}} \circ V_{\tilde{t}_{n_1},\tilde{t}_{n_2}} \,|\, x_2x_1) \quad .$$

Damit lassen sich die folgenden Umformungen vornehmen :

$$\int d\mu(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_1, x_2) \left\{ \begin{array}{l} (x_1 | K_{n_1 \tilde{n}_1} | \tilde{x}_1)(x_2 | K_{n_2 \tilde{n}_2} | \tilde{x}_2) \\ (x_2 | K_{n_2 \tilde{n}_1} | \tilde{x}_1)(x_1 | K_{n_1 \tilde{n}_2} | \tilde{x}_2) \end{array} \right\} \cdot \tag{90}$$

$$(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 | \Lambda_{-t_{\tilde{n}_1}, -t_{\tilde{n}_2}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1}, -\tilde{t}_{\tilde{n}_2}} \circ \tilde{T}_G^{(2)} \circ \Lambda_{t_{n_1}, t_{n_2}} \circ V_{\tilde{t}_{n_1}, \tilde{t}_{n_2}} | x_1 x_2)$$

$$= \int d\mu(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1, x_2, x_1) \left\{ \begin{array}{l} (x_2 | K_{n_1 \tilde{n}_1} | \tilde{x}_2)(x_1 | K_{n_2 \tilde{n}_2} | \tilde{x}_1) \\ (x_1 | K_{n_2 \tilde{n}_1} | \tilde{x}_2)(x_2 | K_{n_1 \tilde{n}_2} | \tilde{x}_1) \end{array} \right\} \cdot$$

$$(\tilde{x}_2 \tilde{x}_1 | \Lambda_{-t_{\tilde{n}_1}, -t_{\tilde{n}_2}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1}, -\tilde{t}_{\tilde{n}_2}} \circ \tilde{T}_G^{(2)} \circ \Lambda_{t_{n_1}, t_{n_2}} \circ V_{\tilde{t}_{n_1}, \tilde{t}_{n_2}} | x_2 x_1)$$

$$= \int d\mu(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_1, x_2) \left\{ \begin{array}{l} (x_1 | K_{n_2 \tilde{n}_2} | \tilde{x}_1)(x_2 | K_{n_1 \tilde{n}_1} | \tilde{x}_2) \\ (x_2 | K_{n_1 \tilde{n}_2} | \tilde{x}_1)(x_1 | K_{n_2 \tilde{n}_1} | \tilde{x}_2) \end{array} \right\} \cdot$$

$$(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 | \Lambda_{-t_{\tilde{n}_2}, -t_{\tilde{n}_1}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}, -\tilde{t}_{\tilde{n}_1}} \circ \tilde{T}_G^{(2)} \circ \Lambda_{t_{n_2}, t_{n_1}} \circ V_{\tilde{t}_{n_2}, \tilde{t}_{n_1}} | x_1 x_2) \cdot$$

Die Beziehung (90) besagt aber nichts anders, als daß in (59) der Summand mit den Indizes $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, n_1, n_2$ identisch ist mit dem Summand mit den Indizes $\tilde{n}_2, \tilde{n}_1, n_2, n_1$.

$\longrightarrow$

$\tilde{n}_1 \tilde{n}_2$ \ $n_1 n_2$	11	12	21	22
11	a	b	b	c
12	d	e	f	g
21	d	f	e	g
22	h	i	i	j

(91)

Um diese Zusammenhänge zu finden, war lediglich die explizite Form des Wechselwirkungskerns erforderlich, nicht aber die der inversen Überlappmatrix. Das Ergebnis (91) trifft somit für alle Konfigurationen zu, die aus zwei Fragmenten mit geschlossenen Schalen bestehen, also z.B. für Binärsysteme der Fragmente α, ^{16}O, ^{40}Ca.

(ii) In der selben Allgemeinheit möchte ich noch eine Beziehung zwischen den Summanden mit den Indizes $\bar{n}_1, \bar{n}_2, n_1, n_2$ und $n_1, n_2, \bar{n}_1, \bar{n}_2$ ableiten. Zu diesem Zweck definiere ich für die Funktionen

$$F: \mathbb{C}^{3r} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots \bar{z}_s, z_{s+1}, \ldots z_r) \longmapsto F(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots \bar{z}_s, z_{s+1}, \ldots z_r)$$

die Operationen (92)

$$\sim : F \longrightarrow F^{\sim}, \quad F^{\sim}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots \bar{z}_s, z_{s+1}, \ldots z_r) = F(z_1, z_2, \ldots z_s, \bar{z}_{s+1}, \ldots \bar{z}_r),$$

$$(\sim^*): F \longrightarrow F^{(\sim^*)}, \quad F^{(\sim^*)}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots \bar{z}_s, z_{s+1}, \ldots z_r) = F(z_1^*, z_2^*, \ldots z_s^*, \bar{z}_{s+1}^*, \ldots \bar{z}_r^*). \tag{93}$$

Im vorliegenden Fall gilt $r \leq 8$ da die Kerne von $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t}_1, \bar{t}_2, x_1, x_2, t_1, t_2$ abhängen können.

Nach der Anwendung der $(\sim^*)$-Operation auf (66.b) und (66.d)

$$\begin{aligned}
(\sim^*): \quad & b^*_{i\,\bar{n}_1\bar{n}_2 n_1 n_2} \longmapsto \bar{b}_{i\,n_1 n_2 \bar{n}_1 \bar{n}_2}, \qquad i = 1,2; \\
& \bar{b}_{i\,\bar{n}_1\bar{n}_2 n_1 n_2} \longmapsto b^*_{i\,n_1 n_2 \bar{n}_1 \bar{n}_2}, \\
& Q_{\bar{n}_1\bar{n}_2 n_1 n_2} \longmapsto Q_{n_1 n_2 \bar{n}_1 \bar{n}_2}
\end{aligned} \tag{94}$$

findet man mittels (60) und (66.a)

$$(\sim^*): \quad (\bar{x}_1\bar{x}_2 | \Lambda_{-t_{\bar{n}_1}, -t_{\bar{n}_2}} \circ V_{-\bar{t}_{\bar{n}_1}, -\bar{t}_{\bar{n}_2}} \circ \bar{T}_G^{(2)} \circ \Lambda_{t_{n_1}, t_{n_2}} \circ V_{\bar{t}_{n_1}, \bar{t}_{n_2}} | x_1 x_2) \tag{95}$$

$$\longmapsto (x_1^* x_2^* | \Lambda_{-t^*_{\bar{n}_1}, -t^*_{\bar{n}_2}} \circ V_{-t^*_{\bar{n}_1}, -t^*_{\bar{n}_2}} \circ \bar{T}_G^{(2)} \circ \Lambda_{t^*_{n_1}, t^*_{n_2}} \circ V_{t^*_{n_1}, t^*_{n_2}} | \bar{x}_1^* \bar{x}_2^*)$$

$$= (\bar{x}_1\bar{x}_2 | \Lambda_{-t_{n_1}, -t_{n_2}} \circ V_{-\bar{t}_{n_1}, -\bar{t}_{n_2}} \circ \bar{T}_G^{(2)} \circ \Lambda_{t_{\bar{n}_1}, t_{\bar{n}_2}} \circ V_{\bar{t}_{\bar{n}_1}, \bar{t}_{\bar{n}_2}} | x_1 x_2) .$$

Zum andern gilt gemäß (38) und (26)

$$\hat{\varepsilon}^{+}_{\tilde{\mu}_1\tilde{m}_1\ \mu_1 m_1} = \hat{\varepsilon}^{*}_{\mu_1 m_1\ \tilde{\mu}_1\tilde{m}_1} \overset{(38)}{=} (\mu_1 \,|\, \Lambda_{-t_{m_1}} \circ V_{-\tilde{t}_{m_1}} \circ \Lambda_{t_{\tilde{m}_1}} \circ V_{\tilde{t}_{\tilde{m}_1}} \,|\, \tilde{\mu}_1)^{*} \overset{(26)}{=}$$

$$= (\tilde{\mu}_1 \,|\, \Lambda_{-\tilde{t}_{\tilde{m}_1}} \circ V_{-t_{\tilde{m}_1}} \circ \Lambda_{\tilde{t}_{m_1}} \circ V_{t_{m_1}} \,|\, \mu_1)$$

$$\overset{(38)}{(92)}{=} \hat{\varepsilon}^{\sim}_{\tilde{\mu}_1\tilde{m}_1\ \mu_1 m_1} \quad ,$$

also

$$(\hat{\varepsilon}^{+})^{-1} = (\hat{\varepsilon}^{\sim})^{-1} \tag{96}$$

bzw.

$$(\hat{\varepsilon}^{-1})^{+} = (\hat{\varepsilon}^{-1})^{\sim} \quad . \tag{97}$$

In (97) wurde ausgenutzt, daß aus

$$\hat{\varepsilon}^{-1}\,\hat{\varepsilon} = \underline{1}$$

nach der Anwendung der $\sim$-Operation

$$(\hat{\varepsilon}^{-1})^{\sim}\,\hat{\varepsilon}^{\sim} = \underline{1} \quad \rightsquigarrow \quad (\hat{\varepsilon}^{-1})^{\sim} = (\hat{\varepsilon}^{\sim})^{-1} \tag{98}$$

folgt. Wird (97) komplex konjugiert, so folgt zunächst

$$(\hat{\varepsilon}^{-1})^{t} = ((\hat{\varepsilon}^{-1})^{\sim})^{*} \quad . \tag{99}$$

Da die Elemente der (inversen) Überlappmatrix Polynome bezüglich der sphärischen Komponenten von $\tilde{t}_i$ und t_i^*, i=1,2 mit reellen Entwicklungskoeffizienten sind (ich komme bei den Anwendungen darauf zurück), ist (99) äquivalent zu

$$(\hat{\varepsilon}^{-1})^{t} = (\hat{\varepsilon}^{-1})^{(\sim *)} \quad . \tag{100}$$

Sei nun $(x_i \,|\, K_{n_i\tilde{n}_j} \,|\, \tilde{x}_j) \,\big|\, \tilde{t}_i \rightleftharpoons t_i^*$ der Kern, der aus $(x_i \,|\, K_{n_i\tilde{n}_j} \,|\, \tilde{x}_j)$ durch Vertau-

schen von $\tilde{t}_i$ mit t_i^* entsteht, dann läßt sich die Anwendung der Operation $(\sim^*)$ auf die Kerne (55) folgendermaßen formulieren:

$$(\sim^*): \quad (x_i|K_{n_i\tilde{n}_j}|\tilde{x}_j) \longmapsto (x_i|K_{n_i\tilde{n}_j}|\tilde{x}_j)^{(\sim^*)} = (\tilde{x}_i^*|K_{n_i\tilde{n}_j}|x_j^*)\Big|_{\tilde{t}_i \rightleftharpoons t_i^*}$$

$$\overset{(55)}{=} \sum_{\nu_i,\tilde{\nu}_j} \underbrace{(\tilde{x}_i^*|\nu_i)}_{\|} \left(\hat{\epsilon}^{-1}_{\nu_i n_i\ \tilde{\nu}_j\tilde{n}_j}\right)^{(\sim^*)} \underbrace{(\tilde{\nu}_j|x_j^*)}_{\|} \qquad (101)$$

$$(\tilde{x}_i|\nu_i)^* \qquad (\tilde{\nu}_j|x_j)^*$$

$$\overset{(100)}{=} \sum_{\nu_i,\tilde{\nu}_j} (x_j|\tilde{\nu}_j)\ \ \hat{\epsilon}^{-1}_{\tilde{\nu}_j\tilde{n}_j\ \ \nu_i n_i}\ (\nu_i|\tilde{x}_i)$$

$$\overset{(55)}{=} (x_j|K_{\tilde{n}_j n_i}|\tilde{x}_i) \ .$$

Fasse ich nun die Ergebnisse (95) und (101) zusammen, so folgt :

$$\int d\mu(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,x_1,x_2) \left\{ \begin{array}{l} (x_1|K_{n_1\tilde{n}_1}|\tilde{x}_1)\big|_{\tilde{t}_i \rightleftharpoons t_i^*}\ (x_2|K_{n_2\tilde{n}_2}|\tilde{x}_2)\big|_{\tilde{t}_i \rightleftharpoons t_i^*} \\ (x_2|K_{n_2\tilde{n}_1}|\tilde{x}_1)\big|_{\tilde{t}_i \rightleftharpoons t_i^*}\ (x_1|K_{n_1\tilde{n}_2}|\tilde{x}_2)\big|_{\tilde{t}_i \rightleftharpoons t_i^*} \end{array} \right\} \qquad (102)$$

$$(\tilde{x}_1\tilde{x}_2|\Lambda_{-\tilde{t}^*_{\tilde{n}_1},\ -\tilde{t}^*_{\tilde{n}_2}\circ V\ -t^*_{\tilde{n}_1},\ -t^*_{\tilde{n}_2}}\circ \tilde{T}_G^{(2)}\circ\Lambda_{\tilde{t}^*_{n_1},\ \tilde{t}^*_{n_2}\circ V t^*_{n_1},\ t^*_{n_2}}|x_1x_2)$$

$$= \int d\mu(x_1^*,x_2^*,\tilde{x}_1^*,\tilde{x}_2^*) \left\{ \begin{array}{l} (\tilde{x}_1^*|K_{n_1\tilde{n}_1}|x_1^*)\big|_{\tilde{t}_i \rightleftharpoons t_i^*}\ (\tilde{x}_2^*|K_{n_2\tilde{n}_2}|x_2^*)\big|_{\tilde{t}_i \rightleftharpoons t_i^*} \\ (\tilde{x}_2^*|K_{n_2\tilde{n}_1}|x_1^*)\big|_{\tilde{t}_i \rightleftharpoons t_i^*}\ (\tilde{x}_1^*|K_{n_1\tilde{n}_2}|x_2^*)\big|_{\tilde{t}_i \rightleftharpoons t_i^*} \end{array} \right\} .$$

$$(x_1^*x_2^*|\Lambda_{-\tilde{t}^*_{\tilde{n}_1},\ -\tilde{t}^*_{\tilde{n}_2}\circ V\ -t^*_{\tilde{n}_1},\ -t^*_{\tilde{n}_2}}\circ \tilde{T}_G^{(2)}\circ\Lambda_{\tilde{t}^*_{n_1},\ \tilde{t}^*_{n_2}\circ V t^*_{n_1},\ t^*_{n_2}}|\tilde{x}_1^*\tilde{x}_2^*)$$

$$\overset{(95)}{\underset{(101)}{=}} \int d\mu(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_1, x_2) \begin{Bmatrix} (x_1|K_{\tilde{n}_1 n_1}|\tilde{x}_1)\ (x_2|K_{\tilde{n}_2 n_2}|\tilde{x}_2) \\ (x_1|K_{\tilde{n}_1 n_2}|\tilde{x}_2)\ (x_2|K_{\tilde{n}_2 n_1}|\tilde{x}_1) \end{Bmatrix} \cdot$$

$$(\tilde{x}_1\tilde{x}_2|\Lambda_{-t_{n_1}, -t_{n_2}} \circ V_{-\tilde{t}_{n_1}, -\tilde{t}_{n_2}} \circ \tilde{T}_G^{(2)} \circ \Lambda_{t_{\tilde{n}_1}, t_{\tilde{n}_2}} \circ V_{\tilde{t}_{\tilde{n}_1}, \tilde{t}_{\tilde{n}_2}} | x_1 x_2) \quad .$$

Im letzten Schritt wurde zusätzlich

$$d\mu(x_1^*, x_2^*, \tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*) = d\mu(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_1^*, x_2^*)$$

ausgenutzt.

Die Gleichung (102) läßt erkennen, daß der durch $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, n_1, n_2$ charakterisierte Summand in (59) , der wegen der Integration über $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_1, x_2$ nur von $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, t_1, t_2$ abhängen kann, durch Vertauschen von $\tilde{t}_i$ mit t_i^*, d.h. durch die Anwendung der $(\sim^*)$-Operation, in den Summanden mit den Indizes $n_1, n_2, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2$ übergeht. Kombiniert man nun dieses Ergebnis mit (91), so folgt daraus (87.a) und (87.b) .⌋

4.3 Anwendungen

Im Abschnitt 4.2 wurden die allgemeinen Grundlagen erarbeitet. An Hand von konkreten Beispielen soll nun deren Effizienz unter Beweis gestellt werden. Ausgehend von (61) soll gezeigt werden, wie die Integralkerne konstruiert werden können. Zur Illustration möchte ich mich auf die Systeme $\alpha+\alpha$, $\alpha+{}^{16}O$ und ${}^{16}O+{}^{16}O$ beschränken.

Zunächst werden die inversen Überlappmatrizen benötigt, mittels denen die Kerne (55) berechnet werden können. Es ist grundsätzlich möglich und das soll im folgenden an den Beispielen gezeigt werden, die Diskussion auf einer allgemeinen Stufe zu führen, so daß der analytische Endausdruck die Integralkerne aller drei Binärsysteme liefert. Würde als schwerstes System ${}^{40}Ca+{}^{40}Ca$ gewählt werden, so könnte auf diese Art ein analytischer Ausdruck abgeleitet werden, der die Integralkerne sämtlicher binärer Untersys-

teme, die aus α, ^{16}O bzw. ^{40}Ca aufgebaut sind, umfaßt.

Die Kerne $(x_i | K_{n_i \tilde{n}_j} | \tilde{x}_j)$

Die Überlappmatrizen in der modifizierten Basis lassen sich mittels der Beziehung (38) berechnen und wie folgt zusammenfassen:

$$\hat{\varepsilon} = \left[\begin{array}{c|c} a_0 \exp(\tilde{t}_1 \cdot t_1^*) & b_0 \exp(\tilde{t}_1 \cdot t_2^*) \\ \hline c_0 \exp(\tilde{t}_2 \cdot t_1^*) & d_0 \exp(\tilde{t}_2 \cdot t_2^*) \end{array}\right] \qquad (103.a)$$

<u>für $\alpha+\alpha$:</u>

$$a_0 = d_0 = b_0 = c_0 = 1 \quad ; \qquad (103.b)$$

<u>für $\alpha + {}^{16}O$:</u>

$$a_0 = 1, \; d_0 = \mathbb{1}_4, \; b_0 = [\tilde{t}, 1], \; c_0 = \begin{bmatrix} t^+ \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad (103.c)$$

<u>für $^{16}O + {}^{16}O$:</u>

$$a_0 = d_0 = \mathbb{1}_4,$$

$$b_0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_3 - t^+\tilde{t} & -t^+ \\ \hline \tilde{t} & 1 \end{array}\right], \quad c_0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_3 - t^+\tilde{t} & t^+ \\ \hline -\tilde{t} & 1 \end{array}\right]. \qquad (103.d)$$

Die Elemente der inversen Überlappmatrix sind dann durch

$$\hat{\varepsilon}^{-1}_{\tilde{\nu}_1 \tilde{n}_1 \nu_1 n_1} = \frac{1}{\det(\hat{\varepsilon})} \left[\begin{array}{c|c} F_{\tilde{n}_1 n_1}(y) \; \mathbb{1}_3 + G_{\tilde{n}_1 n_1}(y) \, t^+\tilde{t} & W_{n_1 \tilde{n}_1}(y) \, t^+ \\ \hline W_{\tilde{n}_1 n_1}(y) \, \tilde{t} & U_{\tilde{n}_1 n_1}(y) \end{array}\right]_{\tilde{\nu}_1 \nu_1} \qquad (104.a)$$

$$\cdot \exp\left(\frac{A_1 - 4}{4} \, \tilde{t}_1 \cdot t_1^* + \frac{A_2 - 4}{4} \, \tilde{t}_2 \cdot t_2^* + \tilde{t}_{n_1+1} \cdot t^*_{n_1+1}\right)$$

gegeben. Hierbei gelten die Definitionen

$$t := t_1 - t_2, \quad \tilde{t} := \tilde{t}_1 - \tilde{t}_2, \quad y := \tilde{t} \cdot t^*, \quad q_k(y) = \exp(y) - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{y^r}{r!} \qquad (104.b)$$

und für die Determinante wird die folgende Faktorisierung eingeführt:

$$\det(\hat{\varepsilon}) = \det(\hat{\varepsilon}(y))\ \exp\Big(\frac{A_1}{4}\,\tilde{t}_1 \dot{t}_1^{*} + \frac{A_2}{4}\,\tilde{t}_2 \dot{t}_2^{*}\Big) \quad . \tag{104.b}$$

Damit ergibt sich

für α+α : $A_1 = A_2 = 4$; (104.c)

$$F_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := 0 \ ,$$

$$G_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := 0 \ ,$$

$$W_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := 0 \ ,$$

$$U_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := (-1)^{\tilde{n}_1 + n_1} \ ,$$

$$\det(\hat{\varepsilon}(y)) := -q_1(-y) \ ;$$

für $\alpha + {}^{16}O$: $A_1 = 4,\ A_2 = 16$; (104.d)

$$F_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := q_2(y)\ \exp(-y)\ \delta_{\tilde{n}_1 2}\,\delta_{n_1 2} \ ,$$

$$G_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := \exp(-y)\ \delta_{\tilde{n}_1 2}\,\delta_{n_1 2} \ ,$$

$$W_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := (-\delta_{\tilde{n}_1 1} + \exp(-y)\,\delta_{\tilde{n}_1 2})\,\delta_{n_1 2} \ ,$$

$$U_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := (-1)^{\tilde{n}_1 + n_1} + [\,(1 + q_2(y))\exp(-y) - 1\,]\,\delta_{\tilde{n}_1 2}\,\delta_{n_1 2} \ ,$$

$$\det(\hat{\varepsilon}(y)) := q_2(y)\ \exp(-y) \ ;$$

für ${}^{16}O + {}^{16}O$: $A_1 = A_2 = 16$; (104.e)

$$F_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := (-1)^{\tilde{n}_1 + n_1} F(y) \ , \qquad F(y) := q_1(y)\,(q_4(y) + q_4(-y))\exp(-2y)$$

$$G_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := G_{(-)^{\tilde{n}_1 + n_1 + 1}}(y) \ , \qquad G_+(y) := q_1(y)\,q_2(y)\exp(-2y) \ ,$$

$$G_-(y) := q_1(y)\,q_2(-y)\exp(-2y) \ ,$$

$$W_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := (-1)^{\tilde{n}_1} W_{(-)^{\tilde{n}_1}+n_1} \quad , \qquad W_+(y) := y\, q_1^2(y) \exp(-3y) \quad ,$$

$$W_-(y) := q_1^3(y) \exp(-3y) \quad ,$$

$$U_{\tilde{n}_1 n_1}(y) := U_{(-)^{\tilde{n}_1}+n_1} \quad , \qquad U_+(y) := y(y+q_1(y))\, q_1(y) \exp(-3y) + F(y) \quad ,$$

$$U_-(y) := -(y+q_1(y))\, q_1^2(y) \exp(-3y) \quad ,$$

$$\det(\hat{\varepsilon}(y)) := [q_6(2y) + q_6(-2y) - 4q_6(y) - 4q_6(-y) - y^2(q_4(y) + q_4(-y))] \exp(-2y) \, .$$

Mit diesen Ergebnissen läßt sich der Kern (55) berechnen. Da in den Fragmenten, die betrachtet werden sollen, s- oder p-Zustände auftreten, durchlaufen die Summationsindizes ν_i und $\tilde{\nu}_j$ in (55) die Zustände

$$l\,m = 1\,{-1},\ 1\,0,\ 1\,1,\ 0\,0 \, .$$

Daraus folgt: (105.a)

$$(x_i | K_{n_i \tilde{n}_j} | \tilde{x}_j) = \frac{1}{\det(\hat{\varepsilon})} \exp\Big(\frac{A_1-4}{4} \tilde{t}_1 t_1^* + \frac{A_2-4}{4} \tilde{t}_2 t_2^* + \tilde{t}_{\tilde{n}_j+1} t_{n_i+1}^*\Big) \cdot$$

$$\left[x_i \, , \, 1\right] \left[\begin{array}{c|c} F_{n_i \tilde{n}_j}(y)\, \mathbb{1}_3 + G_{n_i \tilde{n}_j}(y)\, t^+ \tilde{t} & W_{\tilde{n}_j n_i}(y)\, t^+ \\ \hline W_{n_i \tilde{n}_j}(y)\, \tilde{t} & U_{n_i \tilde{n}_j}(y) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \tilde{x}_j^+ \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

$$= \alpha_{n_i \tilde{n}_j} \cdot \chi(x_i, \tilde{x}_j) \quad \frac{1}{\det(\hat{\varepsilon})} \quad ,$$

$$\alpha_{n_i \tilde{n}_j} := \exp\Big(\frac{A_1-4}{4} \tilde{t}_1 t_1^* + \frac{A_2-4}{4} \tilde{t}_2 t_2^* + \tilde{t}_{\tilde{n}_j+1} t_{n_i+1}^*\Big)\, \alpha_{n_i \tilde{n}_j}(y) \quad , \quad (105.b)$$

$$\alpha_{n_i \tilde{n}_j}(y) := [\, F_{n_i \tilde{n}_j}(y),\ G_{n_i \tilde{n}_j}(y),\ W_{\tilde{n}_j n_i}(y),\ W_{n_i \tilde{n}_j}(y),\ U_{n_i \tilde{n}_j}(y) \,] \quad ,$$

$$\chi(x_i, \tilde{x}_j) := [\, x_i \tilde{x}_j^*,\ x_i t^* \tilde{x}_j^* \tilde{t},\ x_i t^*,\ \tilde{x}_j^* \tilde{t},\ 1 \,] \quad . \quad (105.c)$$

Die Zerlegung dieses Kernes in zwei skalar multiplizierte fünfer Vektoren wird sich bei den weiteren Ausführungen als zweckmäßig erweisen. Zunächst

lassen sich die in (61) auftretenden Produkte der Kerne wie folgt darstellen:

$$(x_1|K_{n_1\bar{n}_1}|\bar{x}_1)(x_2|K_{n_2\bar{n}_2}|\bar{x}_2) = \alpha_{n_1\bar{n}_1}\left[\chi^t(x_1,\bar{x}_1)\,\chi(x_2,\bar{x}_2)\right]\alpha^t_{n_2\bar{n}_2}\;\frac{1}{(\det(\hat{\epsilon}))^2},$$

$$(x_2|K_{n_2\bar{n}_1}|\bar{x}_1)(x_1|K_{n_1\bar{n}_2}|\bar{x}_2) = \alpha_{n_2\bar{n}_1}\left[\chi^t(x_2,\bar{x}_1)\,\chi(x_1,\bar{x}_2)\right]\alpha^t_{n_1\bar{n}_2}\;\frac{1}{(\det(\hat{\epsilon}))^2}. \tag{106}$$

Integralkern für Gauß´sche Wechselwirkungen (mit Ortsaustausch)

Wie bereits diskutiert, sind die Kerne (55) Polynome endlichen Grades. Wegen der Einschränkung auf Fragmente mit s- oder p-Zuständen treten in den Ausdrücken (106) nur **nullte oder erste** Ordnungen auf. Daher genügt es z.B. den Gauß Wechselwirkungskern (66.a) in der modifizierten Basis durch den Ersatzausdruck (siehe Anhang B)

$$\begin{aligned} Q_{\bar{n}_1\bar{n}_2 n_1 n_2}\Big\{ & (\bar{x}_1|b_1)(\bar{x}_2|b_2)(\bar{b}_1|x_1)(\bar{b}_2|x_2) \\ & +\lambda_+[(\bar{x}_2|b_2)(\bar{b}_2|x_2)\;\bar{x}_1\cdot x_1^* + (\bar{x}_1|b_1)(\bar{b}_1|x_1)\;\bar{x}_2\cdot x_2^*] + \lambda_+^2\,\bar{x}_1\cdot x_1^*\,\bar{x}_2\cdot x_2^* \\ & -\lambda_-[(\bar{x}_2|b_2)(\bar{b}_1|x_1)\;\bar{x}_1\cdot x_2^* + (\bar{x}_1|b_1)(\bar{b}_2|x_2)\;\bar{x}_2\cdot x_1^*] + \lambda_-^2\,\bar{x}_1\cdot x_2^*\,\bar{x}_2\cdot x_1^* \\ & -2q[(\bar{b}_1|x_1)(\bar{b}_2|x_2)\;\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2 + (\bar{x}_1|b_1)(\bar{x}_2|b_2)\;x_1^*\cdot x_2^*] + 4q^2\,\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\;x_1^*\cdot x_2^*\Big\}, \end{aligned} \tag{107}$$

der die Integration erheblich vereinfacht, zu ersetzen.

Die Ausführung der Integration in (61) ergibt im Fall der Gauß Wechselwirkung mittels (106) und (107) :

$$\int d\mu(\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_1,x_2)\;(x_1|K_{n_1\bar{n}_1}|\bar{x}_1)(x_2|K_{n_2\bar{n}_2}|\bar{x}_2)\cdot$$

$$(\bar{x}_1\bar{x}_2\,|\,\Lambda_{-t_{\bar{n}_1},-t_{\bar{n}_2}}\circ V_{-\bar{t}_{\bar{n}_1},-\bar{t}_{\bar{n}_2}}\circ\bar{T}_G^{(2)}\circ\Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}}\circ V_{\bar{t}_{n_1},\bar{t}_{n_2}}\,|\,x_1x_2) \;=$$

$$= \frac{Q_{\tilde{n}_1 \tilde{n}_2 n_1 n_2}}{(\det(\hat{\varepsilon}))^2} \; \alpha_{n_1 \tilde{n}_1} \Bigg\{ \int d\mu(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_1, x_2) \; \chi^t(x_1, \tilde{x}_1) \; \chi(x_2, \tilde{x}_2)$$

$$\Big([(\tilde{x}_1 | b_1)(\tilde{b}_1 | x_1) + \lambda_+ \tilde{x}_1 x_1^*][(\tilde{x}_2 | b_2)(\tilde{b}_2 | x_2) + \lambda_+ \tilde{x}_2 x_2^*]$$

$$- \lambda_- [(\tilde{x}_2 | b_2)(\tilde{b}_1 | x_1) \; \tilde{x}_1 x_2^* + (\tilde{x}_1 | b_1)(\tilde{b}_2 | x_2) \; \tilde{x}_2 x_1^*]$$

$$- 2q [(\tilde{b}_1 | x_1)(\tilde{b}_2 | x_2) \; \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + (\tilde{x}_1 | b_1)(\tilde{x}_2 | b_2) \; x_1^* x_2^*]$$

$$+ \lambda_-^2 \; \tilde{x}_1 x_2^* \; \tilde{x}_2 x_1^* + 4q^2 \; \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \; x_1^* x_2^* \Big) \Bigg\} \alpha^t_{n_2 \tilde{n}_2}$$

$$= \frac{Q_{\tilde{n}_1 \tilde{n}_2 n_1 n_2}}{(\det(\hat{\varepsilon}))^2} \; \alpha_{n_1 \tilde{n}_1} \; A(11,22) \; \alpha^t_{n_2 \tilde{n}_2} \tag{108.a}$$

mit

$$A(11,22) := \tag{108.b}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_1 b_1^* + 3\lambda_+ \\ \tilde{b}_1 t^* \; b_1^* \tilde{t} + \lambda_+ y \\ \tilde{b}_1 t^* \\ b_1^* \tilde{t} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{b}_2 b_2^* + 3\lambda_+ \\ \tilde{b}_2 t^* \; b_2^* \tilde{t} + \lambda_+ y \\ \tilde{b}_2 t^* \\ b_2^* \tilde{t} \\ 1 \end{bmatrix}^t +$$

$$\begin{bmatrix} 3\lambda_-^2 + 12 q^2 & (\lambda_-^2 + 4q^2) y & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda_-^2 + 4q^2) y & \lambda_-^2 y^2 + 4q^2 \; t^* t^* \; \tilde{t} \tilde{t} & 0 & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \cdot \\ 0 & & & & \cdot \\ 0 & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & & & 0 \end{bmatrix} -$$

$$\left\{\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\ \bar{\tau}\,\bar{b}_1 t^*\\ 0\\ \bar{t}\\ 0\end{bmatrix}\lambda_- + 2q\begin{bmatrix}b_1^*\\ t^*\,b_1^*\bar{t}\\ t^*\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}b_2^*\\ t^*\,b_2^*\bar{t}\\ t^*\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^t - \left\{2q\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\ \bar{\tau}\,\bar{b}_1 t^*\\ 0\\ \bar{t}\\ 0\end{bmatrix} + \lambda_-\begin{bmatrix}b_1^*\\ t^*\,b_1^*\bar{t}\\ t^*\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\bar{b}_2\\ \bar{t}\,\bar{b}_2 t^*\\ 0\\ \bar{t}\\ 0\end{bmatrix}^t ,$$

$$\int d\mu(\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_1,x_2)\ (x_2|K_{n_2\bar{n}_1}|\bar{x}_1)(x_1|K_{n_1\bar{n}_2}|\bar{x}_2)\cdot$$

$$(\bar{x}_1\bar{x}_2\,|\,\Lambda_{-t_{\bar{n}_1},-t_{\bar{n}_2}}\circ V_{-\bar{t}_{\bar{n}_1},-\bar{t}_{\bar{n}_2}}\circ \bar{T}\,G^{(2)}\circ\Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}}\circ V_{\bar{t}_{n_1},\bar{t}_{n_2}}\,|\,x_1x_2) \quad =$$

$$=\frac{Q_{\bar{n}_1\bar{n}_2n_1n_2}}{(\det(\hat{\varepsilon}))^2}\,\alpha_{n_2\bar{n}_1}\left\{\int d\mu(\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_1,x_2)\ \chi^t(x_2,\bar{x}_1)\ \chi(x_1,\bar{x}_2)\right.$$

$$\Big([(\bar{x}_1|b_1)(\bar{b}_2|x_2) - \lambda_-\,\bar{x}_1{\cdot}x_2^*][(\bar{x}_2|b_2)(\bar{b}_1|x_1) - \lambda_-\,\bar{x}_2{\cdot}x_1^*]$$

$$+\lambda_+[(\bar{x}_1|b_1)(\bar{b}_1|x_1)\,\bar{x}_2{\cdot}x_2^* + (\bar{x}_2|b_2)(\bar{b}_2|x_2)\,\bar{x}_1{\cdot}x_1^*]$$

$$-2q[(\bar{b}_1|x_1)(\bar{b}_2|x_2)\,\bar{x}_1\bar{x}_2 + (\bar{x}_1|b_1)(\bar{x}_2|b_2)\,x_1^*x_2^*]$$

$$\left.+\lambda_+^2\,\bar{x}_1{\cdot}x_1^*\,\bar{x}_2{\cdot}x_2^* + 4q^2\,\bar{x}_1\bar{x}_2\,x_1^*x_2^*\Big)\right\}\alpha^t_{n_1\bar{n}_2}$$

$$=\frac{Q_{\bar{n}_1\bar{n}_2n_1n_2}}{(\det(\hat{\varepsilon}))^2}\ \alpha_{n_2\bar{n}_1}\ A(21,12)\ \alpha^t_{n_1\bar{n}_2} \qquad (109.a)$$

mit

$$A(21,12): = \qquad (109.b)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{b}_2 b_1^* & -3\lambda_- \\ \bar{b}_2 \tau^* \; b_1^* \bar{\tau} & -\lambda_- y \\ \bar{b}_2 \tau^* & \\ b_1^* \bar{\tau} & \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 b_2^* & -3\lambda_- \\ \bar{b}_1 \tau^* \; b_2^* \bar{\tau} & -\lambda_- y \\ \bar{b}_1 \tau^* & \\ b_2^* \bar{\tau} & \\ 1 & \end{bmatrix}^t +$$

$$\begin{bmatrix} 3\lambda_+^2 + 12\,q^2 & (\lambda_+^2 + 4\,q^2)\,y & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda_+^2 + 4\,q^2)\,y & \lambda_+^2 y^2 + 4\,q^2\, \tau^*\tau^*\, \bar{\tau}\bar{\tau} & 0 & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \cdot \\ 0 & & & & \cdot \\ 0 & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & & & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\left\{ \lambda_+ \begin{bmatrix} \bar{b}_2 \\ \bar{\tau}\, b_2 \tau^* \\ 0 \\ \bar{\tau} \\ 0 \end{bmatrix} - 2q \begin{bmatrix} b_1^* \\ \tau^*\, b_1^* \bar{\tau} \\ \tau^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} b_2^* \\ \tau^*\, b_2^* \bar{\tau} \\ \tau^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t - \left\{ 2q \begin{bmatrix} \bar{b}_2 \\ \bar{\tau}\, b_2 \tau^* \\ 0 \\ \bar{\tau} \\ 0 \end{bmatrix} - \lambda_+ \begin{bmatrix} b_1^* \\ \tau^*\, b_1^* \bar{\tau} \\ \tau^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{\tau}\, b_1 \tau^* \\ 0 \\ \bar{\tau} \\ 0 \end{bmatrix}^t .$$

Werden nun die Ergebnisse (108.a) und (109.a) in (61) eingesetzt, so ergibt sich für die Wechselwirkung (45) im Falle einer 2-Teilchen Gauß Wechselwirkung $\bar{T}(2) \equiv \bar{T}_G(2)$, wie sie laut (62.a) gegeben ist, die analytische Form des Integralkerns für die Fragmentierungen $\alpha+\alpha$ (j=2), $\alpha + {}^{16}O$ (j=5) und ${}^{16}O + {}^{16}O$ (j=8) :

$$\left((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}] \,\middle|\, \sigma_G(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2;t_1,t_2) \,\middle|\, (\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}] \right) = \qquad (110)$$

$$(\det(\hat{\varepsilon}))^2 \sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}} Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2} \Big\{ (3a_{[2]}+5a_{[11]})\; \alpha_{n_1\tilde{n}_1}\; A(11,22)\; \alpha^t_{n_2\tilde{n}_2} + (3a_{[2]}-5a_{[11]})\; \alpha_{n_2\tilde{n}_1}\; A(21,12)\; \alpha^t_{n_1\tilde{n}_2} \Big\} \,.$$

Die in (110) auftretenden Größen sind explizit gegeben. (Siehe (105.b), (104.b) - (104.e), (108.b), (109.b), (66.b) - (66.d), (65), (64))

Diese analytische Formel hat eine ganz besondere Eigenschaft. Hier wird sauber getrennt zwischen Größen, die mit der Konfigurationsbeschreibung zusammenhängen ($\alpha_{n_i\tilde{n}_j}$, $\det(\hat{\varepsilon})$), und Größen, die die Information über die Wechselwirkung tragen. Diese Strukturierung ist letztlich zurückzuführen auf die in (106) vorgenommene Zerlegung der Kerne.
Von hier ab ist es nun einfach, für die genannten Konfigurationen die Integralkerne im Falle des relativkinetischen Energieoperators bzw. der Coulomb Wechselwirkung analytisch anzugeben.

Integralkern für den relativkinetischen Energieoperator

Analog zum Vorhergehenden könnte ein Ersatzausdruck für den Kern (76) des relativkinetischen Energieoperators eingeführt werden. Die anschliessende Integration würde zu dem gewünschten analytischen Ausdruck führen. Dieser Weg soll hier aber nicht beschritten werden. Vielmehr möchte ich die Vorschrift (74) auf (110) anwenden unter der Berücksichtigung, daß nun $a_{[2]} = a_{[11]} = 1$ gilt. Von der Differentiation nach γ sind nur die Größen betroffen, die die Information über die Wechselwirkung tragen. Für die Konfigurationen $\alpha+\alpha$ (j=2), $\alpha+{}^{16}O$ (j=5) und ${}^{16}O+{}^{16}O$ (j=8) resultiert also für den analytischen Integralkern des relativkinetischen Energieoperators :

$$\left((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}] \,\middle|\, \sigma_{rel}(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2;t_1,t_2) \,\middle|\, (\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}] \right) =$$

$$-\frac{4\hbar\omega}{A}\;(\det(\hat{\varepsilon}))^2 \sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}} \Big[4\,\alpha_{n_1\tilde{n}_1} \Big\{ \frac{\partial}{\partial \gamma_{q\to -q}} Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2}\; A(11,22) \Big|_{\gamma=0} \Big\{ \alpha^{t}_{n_2\tilde{n}_2}$$

$$- \alpha_{n_2\tilde{n}_1} \Big\{ \frac{\partial}{\partial \gamma_{q\to -q}} Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2}\; A(21,12) \Big|_{\gamma=0} \Big\{ \alpha^{t}_{n_1\tilde{n}_2} \Big] \;=$$

$$-\frac{\hbar\omega}{A}\;(\det(\hat{\varepsilon}))^2 \sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}} \Big[4\,\alpha_{n_1\tilde{n}_1}\, A_{\mathrm{rel}}(11,22)\, \alpha^{t}_{n_2\tilde{n}_2} - \alpha_{n_2\tilde{n}_1}\, A_{\mathrm{rel}}(21,12)\, \alpha^{t}_{n_1\tilde{n}_2} \Big] \cdot$$

$$\exp(\tilde{t}_{\tilde{n}_1}\cdot t^{*}_{n_1} + \tilde{t}_{\tilde{n}_2}\cdot t^{*}_{n_2}) \qquad (111.a)$$

mit

$$A_{\mathrm{rel}}(11,22) := \qquad (111.b)$$

$$(-3+\tfrac{1}{2}\,d\cdot d)\begin{bmatrix} \tilde{c}_1\cdot c^{*}_1 + 3 \\ \tilde{c}_1\cdot t^{*}\; c^{*}_1\tilde{t} + y \\ \tilde{c}_1\cdot t^{*} \\ c^{*}_1\tilde{t} \\ 1 \end{bmatrix}^{t} \begin{bmatrix} \tilde{c}_2\cdot c^{*}_2 + 3 \\ \tilde{c}_2\cdot t^{*}\; c^{*}_2\tilde{t} + y \\ \tilde{c}_2\cdot t^{*} \\ c^{*}_2\tilde{t} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{c}_1\cdot - c^{*}_1\cdot \\ \tilde{c}_1\cdot t^{*}\;\tilde{t}\cdot - c^{*}_1\tilde{t}\; t^{*}\cdot \\ -t^{*}\cdot \\ \tilde{t}\cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_2 - c^{*}_2 \\ \tilde{c}_2\cdot t^{*}\;\tilde{t} - c^{*}_2\tilde{t}\; t^{*} \\ -t^{*} \\ \tilde{t} \\ 0 \end{bmatrix}^{t}$$

$$+ \begin{bmatrix} d(\tilde{c}_1 - c^{*}_1) - 3 \\ d(\tilde{t}\;\tilde{c}_1\cdot t^{*} - t^{*}\; c^{*}_1\tilde{t}) - y \\ -d\cdot t^{*} \\ d\cdot\tilde{t} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_2\cdot c^{*}_2 + 3 \\ \tilde{c}_2\cdot t^{*}\; c^{*}_2\tilde{t} + y \\ \tilde{c}_2\cdot t^{*} \\ c^{*}_2\tilde{t} \\ 1 \end{bmatrix}^{t} - \begin{bmatrix} \tilde{c}_1\cdot c^{*}_1 + 3 \\ \tilde{c}_1\cdot t^{*}\; c^{*}_1\tilde{t} + y \\ \tilde{c}_1\cdot t^{*} \\ c^{*}_1\tilde{t} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(\tilde{c}_2 - c^{*}_2) + 3 \\ d(\tilde{t}\;\tilde{c}_2\cdot t^{*} - t^{*}\; c^{*}_2\tilde{t}) + y \\ -d\cdot t^{*} \\ d\cdot\tilde{t} \\ 0 \end{bmatrix}^{t},$$

$$A_{rel}(21,12) := \qquad (111.c)$$

$$(-3+\tfrac{1}{2}\,d\cdot d)\left\{\begin{bmatrix} \bar{c}_2\cdot c_1^* \\ \bar{c}_2 t^*\ c_1^*\bar{t} \\ \bar{c}_2 t^* \\ c_1^*\bar{t} \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{c}_1\cdot c_2^* \\ \bar{c}_1 t^*\ c_2^*\bar{t} \\ \bar{c}_1 t^* \\ c_2^*\bar{t} \\ 1 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} \bar{c}_2\cdot \\ \bar{c}_2 t^*\ \bar{t}\cdot \\ 0 \\ \bar{t}\cdot \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2^* \\ c_2^*\bar{t}\ t^* \\ t^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} c_1^*\cdot \\ c_1^*\bar{t}\ t^*\cdot \\ t^*\cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_1 t^*\ \bar{t} \\ 0 \\ \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t + \right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} 3 & y & 0 & 0 & 0 \\ y & y^2 & 0 & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \cdot \\ 0 & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}\right\} - 2\begin{bmatrix} 3 & y & 0 & 0 & 0 \\ y & y^2 & 0 & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \cdot \\ 0 & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{c}_2\cdot + c_1^*\cdot \\ \bar{c}_2 t^*\ \bar{t}\cdot + c_1^*\bar{t}\ t^*\cdot \\ t^*\cdot \\ \bar{t}\cdot \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{c}_1 + c_2^* \\ \bar{c}_1 t^*\ \bar{t} + c_2^*\bar{t}\ t^* \\ t^* \\ \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t$$

$$+ \begin{bmatrix} d(\bar{c}_2 + c_1^*) & +3 \\ d(\bar{c}_2 t^*\ \bar{t} + c_1^*\bar{t}\ t^*) & +y \\ d\cdot t^* \\ d\cdot\bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{c}_1\cdot c_2^* \\ \bar{c}_1 t^*\ c_2^*\bar{t} \\ \bar{c}_1 t^* \\ c_2^*\bar{t} \\ 1 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} \bar{c}_2\cdot c_1^* \\ \bar{c}_2 t^*\ c_1^*\bar{t} \\ \bar{c}_2 t^* \\ c_1^*\bar{t} \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d(\bar{c}_1 + c_2^*) & -3 \\ d(\bar{c}_1 t^*\ \bar{t} + c_2^*\bar{t}\ t^*) & -y \\ d\cdot t^* \\ d\cdot\bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t$$

$$+ \begin{bmatrix} d\cdot \\ d\cdot t^*\ \bar{t}\cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2^* \\ c_2^*\bar{t}\ t^* \\ t^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} d\cdot \\ d\cdot\bar{t}\ t^*\cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_1 t^*\ \bar{t} \\ 0 \\ \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} \bar{c}_2\cdot \\ \bar{c}_2 t^*\ \bar{t}\cdot \\ 0 \\ \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ d\bar{t}\ t^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} c_1^*\cdot \\ c_1^*\bar{t}\ t^*\cdot \\ t^*\cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ d\cdot t^*\ \bar{t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t$$

Integralkern für die Coulomb Wechselwirkung

Wiederum soll hier nicht der Weg, der über die Einführung eines vereinfachten Ersatzausdruckes und eine anschließende Integration zum Ziel führt, eingeschlagen werden. Vielmehr möchte ich methodisch analog zu den Ausführungen zum Integralkern für den relativkinetischen Energieoperator verfahren und die Prozedur (85) auf (110) anwenden. Der Integralkern der Coulomb Wechselwirkung kann somit für die bereits genannten Fragmentierungen unter Berücksichtigung der Symmetriewichtungsfaktoren (9.c) wie folgt berechnet werden:

$$\left((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\;\middle|\,\sigma_C(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2;t_1,t_2)\;\middle|\,(\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\right) = \tag{112}$$

$$(\det(\hat{\varepsilon}))^2 \sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}} \frac{e^2}{b\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi}} \left(\frac{Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2}}{\sqrt{(2p)^3}}\right) \Big\{ 2\,\alpha_{n_1\tilde{n}_1}\, A(11,22)\, \alpha^{t}_{n_2\tilde{n}_2} - \alpha_{n_2\tilde{n}_1}\, A(21,12)\, \alpha^{t}_{n_1\tilde{n}_2} \Big\} \quad .$$

Mit der in (85) vorgegebenen Substitution für Y lauten die Parameter von (65) und (66.c):

$$p = \frac{\varphi}{2}\,, \qquad q = \frac{\varphi-1}{4}\,, \qquad \lambda_{\pm} = \frac{\varphi\pm 1}{2} \quad . \tag{113}$$

Für (66.d) findet man

$$\begin{aligned} b_1^* &= c_1^* - \tfrac{1}{2} f\,(1-\varphi)\,, \\ b_2^* &= c_2^* + \tfrac{1}{2} f\,(1-\varphi)\,, \\ \tilde{b}_1 &= \tilde{c}_1 - \tfrac{1}{2} f\,(1-\varphi)\,, \\ \tilde{b}_2 &= \tilde{c}_2 + \tfrac{1}{2} f\,(1-\varphi) \end{aligned} \tag{114}$$

und (66.b) führt auf (115)

$$\frac{e^2}{b\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2}}{\sqrt{(2p)^3}}\right) = \frac{e^2}{b\sqrt{2\pi}}\, \exp(\tilde{t}_{\tilde{n}_1}\cdot t^*_{n_1} + \tilde{t}_{\tilde{n}_2}\cdot t^*_{n_2})\, \exp(-\frac{1-\varphi}{4} f\cdot f) \quad .$$

Diese Umformungen führen (112) über in

$$\left((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\,\middle|\,\mathcal{O}_C(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2;t_1,t_2)\,\middle|\,(\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\right) \;=\; \tag{116}$$

$$\frac{e^2\,(\det(\hat{\varepsilon}))^2}{b\sqrt{2\pi}} \sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}} \exp(\tilde{t}_{\tilde{n}_1}\cdot t^*_{n_1} + \tilde{t}_{\tilde{n}_2}\cdot t^*_{n_2}) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!}\,(-\tfrac{f\cdot f}{4})^{\mu}\cdot$$

$$\left\{2\alpha_{n_1\tilde{n}_1}\left[\int_0^1 \frac{(1-\varphi)^{\mu}\,A(11,22)}{\sqrt{1-\varphi}}\,d\varphi\right]\alpha^t_{n_2\tilde{n}_2} \;-\; \alpha_{n_2\tilde{n}_1}\left[\int_0^1 \frac{(1-\varphi)^{\mu}\,A(21,12)}{\sqrt{1-\varphi}}\,d\varphi\right]\alpha^t_{n_1\tilde{n}_2}\right\}.$$

Zur Ausführung der Integration ist es vorteilhaft, die Matrizen A(11,22) und A(21,12) nach (1-φ) zu entwickeln:

$$A(11,22) \;=\; \sum_{r=0}^{4} (1-\varphi)^r\, A_r(11,22)\;, \tag{117}$$

$$A(21,12) \;=\; \sum_{r=0}^{4} (1-\varphi)^r\, A_r(21,12)\;.$$

Aus (108.b),(109.b), (113) und (114) folgt, daß die Potenzen nicht größer als 4 werden können. Der endgültige analytische Ausdruck des Integralkerns der mikroskopischen Coulomb Wechselwirkung im Falle der Fragmentierungen α+α (j=2), α + ^{16}O (j=5) und ^{16}O + ^{16}O (j=8) lautet folglich :

$$\left((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\,\middle|\,\mathcal{O}_C(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2;t_1,t_2)\,\middle|\,(\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\right) \;=\; \tag{118.a}$$

$$\frac{e^2\,(\det(\hat{\varepsilon}))^2}{b\sqrt{2\pi}} \sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{4} \exp(\tilde{t}_{\tilde{n}_1}\cdot t^*_{n_1} + \tilde{t}_{\tilde{n}_2}\cdot t^*_{n_2})\,(-\tfrac{f\cdot f}{4})^{\mu}\,\frac{1}{\mu!\,(\mu+r+\frac{1}{2})}\;\cdot$$

$$\left\{2\alpha_{n_1\tilde{n}_1}\,A_r(11,22)\,\alpha^t_{n_2\tilde{n}_2} \;-\; \alpha_{n_2\tilde{n}_1}\,A_r(21,12)\,\alpha^t_{n_1\tilde{n}_2}\right\}$$

mit

$$A_0(11,22) = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \cdot c_1^* + 3 \\ \bar{c}_1 \cdot t^* \; c_1^* \bar{t} + y \\ \bar{c}_1 \cdot t^* \\ c_1^* \bar{t} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_2 \cdot c_2^* + 3 \\ \bar{c}_2 \cdot t^* \; c_2^* \bar{t} + y \\ \bar{c}_2 \cdot t^* \\ c_2^* \bar{t} \\ 1 \end{bmatrix}^t , \qquad (118.b)$$

$$2\,A_1(11,22) = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \cdot + c_1^* \cdot \\ \bar{c}_1 \cdot t^* \; \bar{t} \cdot + c_1^* \bar{t} \; t \cdot^* \\ t^* \cdot \\ \bar{t} \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_2 + c_2^* \\ \bar{c}_2 \cdot t^* \; \bar{t} + c_2^* \bar{t} \; t^* \\ t^* \\ \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t + \qquad (118.c)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_1 \cdot c_1^* + 3 \\ \bar{c}_1 \cdot t^* \; c_1^* \bar{t} + y \\ \bar{c}_1 \cdot t^* \\ c_1^* \bar{t} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \cdot (c_2^* + \bar{c}_2) - 3 \\ \bar{c}_2 \cdot t^* \; f \cdot \bar{t} + c_2^* \bar{t} \; f \cdot t^* - y \\ f \cdot t^* \\ f \cdot \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} f \cdot (c_1^* + \bar{c}_1) + 3 \\ \bar{c}_1 \cdot t^* \; f \cdot \bar{t} + c_1^* \bar{t} \; f \cdot t^* + y \\ f \cdot t^* \\ f \cdot \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_2 \cdot c_2^* + 3 \\ \bar{c}_2 \cdot t^* \; c_2^* \bar{t} + y \\ \bar{c}_2 \cdot t^* \\ c_2^* \bar{t} \\ 1 \end{bmatrix}^t ,$$

$$4\,A_2(11,22) = -\begin{bmatrix} f \cdot (\bar{c}_1 + c_1^*) + 3 \\ \bar{c}_1 \cdot t^* \; f \cdot \bar{t} + c_1^* \bar{t} \; f \cdot t^* + y \\ f \cdot t^* \\ f \cdot \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \cdot (\bar{c}_2 + c_2^*) - 3 \\ \bar{c}_2 \cdot t^* \; f \cdot \bar{t} + c_2^* \bar{t} \; f \cdot t^* - y \\ f \cdot t^* \\ f \cdot \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t + \qquad (118.d)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_1 \cdot c_1^* + 3 \\ \bar{c}_1 \cdot t^* \; c_1^* \bar{t} + y \\ \bar{c}_1 \cdot t^* \\ c_1^* \bar{t} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \cdot f \\ f \cdot \bar{t} \; f \cdot t^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} f \cdot f \\ f \cdot \bar{t} \; f \cdot t^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_2 \cdot c_2^* + 3 \\ \bar{c}_2 \cdot t^* \; c_2^* \bar{t} + y \\ \bar{c}_2 \cdot t^* \\ c_2^* \bar{t} \\ 1 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 6 & 2y & & 0 & 0 & 0 \cdot \\ 2y & y^2 + \bar{t} \bar{t} \; t^* \cdot t^* & & 0 & & \cdot \\ 0 & 0 & & 0 & & \cdot \\ 0 & & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} \bar{c}_1\cdot + c_1^*\cdot \\ \bar{c}_1\cdot t^* \bar{t}\cdot + c_1^*\bar{t}\, t^*\cdot \\ t^*\cdot \\ \bar{t}\cdot \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2f \\ f\cdot\bar{t}\, t^* + f\cdot t^*\bar{t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} 2f\cdot \\ f\cdot\bar{t}\, t^*\cdot + f\cdot t^*\bar{t}\cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{c}_2 + c_2^* \\ \bar{c}_2 t^* \bar{t} + c_2^*\bar{t}\, t^* \\ t^* \\ \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t,$$

$$8\, A_3(11,22) = -\begin{bmatrix} 2f\cdot \\ f\cdot\bar{t}\, t^*\cdot + f\cdot t^*\bar{t}\cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2f \\ f\cdot\bar{t}\, t^* + f\cdot t^*\bar{t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t + \tag{118.e}$$

$$\begin{bmatrix} f\cdot f \\ f\cdot\bar{t}\, f\cdot t^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f\cdot(\bar{c}_2 + c_2^*) - 3 \\ \bar{c}_2 t^* f\cdot\bar{t} + c_2^*\bar{t}\, f\cdot t^* - y \\ f\cdot t^* \\ f\cdot\bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} f\cdot(\bar{c}_1 + c_1^*) + 3 \\ \bar{c}_1 t^* f\cdot\bar{t} + c_1^*\bar{t}\, f\cdot t^* + y \\ f\cdot t^* \\ f\cdot\bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f\cdot f \\ f\cdot\bar{t}\, f\cdot t^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t,$$

$$16\, A_4(11,22) = \begin{bmatrix} f\cdot f \\ f\cdot\bar{t}\, f\cdot t^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f\cdot f \\ f\cdot\bar{t}\, f\cdot t^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t, \tag{118.f}$$

$$A_0(21,12) = \begin{bmatrix} 3 & y & 0 & 0 & 0 \\ y & y^2 & 0 & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & & \cdot & 0 \end{bmatrix} + \tag{118.g}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_2 c_1^* \\ \bar{c}_2 t^* \quad c_1^* \bar{t} \\ \bar{c}_2 t^* \\ c_1^* \bar{t} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 c_2^* \\ \bar{c}_1 t^* \quad c_2^* \bar{t} \\ \bar{c}_1 t^* \\ c_2^* \bar{t} \\ 1 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} \bar{c}_2 \cdot \\ \bar{c}_2 t^* \quad \bar{t} \cdot \\ 0 \\ \bar{t} \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^* \\ c_2^* \bar{t} \; t^* \\ t^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} c_1^* \cdot \\ c_1^* \bar{t} \; t^* \cdot \\ t^* \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_1 t^* \quad \bar{t} \\ 0 \\ \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t ,$$

$$2\,A_1(21,12) = \begin{bmatrix} \bar{c}_2 \cdot - c_1^* \cdot \\ \bar{c}_2 t^* \; \bar{t} \cdot - c_1^* \bar{t} \; t^* \cdot \\ -t^* \cdot \\ \bar{t} \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 - c_2^* \\ \bar{c}_1 t^* \; \bar{t} - c_2^* \bar{t} \; t^* \\ -t^* \\ \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} 6 & 2y & 0 & 0 & 0 \\ 2y & 2y^2 & 0 & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \cdot \\ 0 & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & & \cdot & 0 \end{bmatrix} + \tag{118.h}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_2 c_1^* \\ \bar{c}_2 t^* \quad c_1^* \bar{t} \\ \bar{c}_2 t^* \\ c_1^* \bar{t} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \cdot (\bar{c}_1 - c_2^*) + 3 \\ \bar{c}_1 t^* \; f \bar{t} - c_2^* \bar{t} \; f t^* + y \\ -f t^* \\ f \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} f \cdot (\bar{c}_2 - c_1^*) - 3 \\ \bar{c}_2 t^* \; f \bar{t} - c_1^* \bar{t} \; f t^* - y \\ -f t^* \\ f \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 c_2^* \\ \bar{c}_1 t^* \quad c_2^* \bar{t} \\ \bar{c}_1 t^* \\ c_2^* \bar{t} \\ 1 \end{bmatrix}^t +$$

$$\begin{bmatrix} f \cdot \\ f t^* \; \bar{t} \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^* \\ c_2^* \bar{t} \; t^* \\ t^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} f \cdot \\ f \bar{t} \; t^* \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_1 t^* \; \bar{t} \\ 0 \\ \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} \bar{c}_2 \cdot \\ \bar{c}_2 t^* \; \bar{t} \cdot \\ 0 \\ \bar{t} \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f \bar{t} \; t^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} c_1^* \cdot \\ c_1^* \bar{t} \; t^* \cdot \\ t^* \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f t^* \; \bar{t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t ,$$

$$4\,A_2(21,12) = -\begin{bmatrix} f\cdot(\bar{c}_2 - c_1^*) - 3 \\ \bar{c}_2 t^* f\bar{t} - c_1^*\bar{t}\, f t^* - y \\ -f t^* \\ f\bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f\cdot(\bar{c}_1 - c_2^*) + 3 \\ \bar{c}_1 t^* f\bar{t} - c_2^*\bar{t}\, f t^* + y \\ -f t^* \\ f\bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t - \tag{118.i}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_2\cdot - c_1^* \\ \bar{c}_2 t^*\,\bar{t}\cdot - c_1^*\bar{t}\, t^* \\ -t^* \\ \bar{t}\cdot \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2f \\ f\bar{t}\, t^* + f t^*\,\bar{t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 2f\cdot \\ f\bar{t}\, t^* + f t^*\,\bar{t}\cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{c}_1 - c_2^* \\ \bar{c}_1 t^*\,\bar{t} - c_2^*\bar{t}\, t^* \\ -t^* \\ \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix}^t -$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_2\cdot c_1^* \\ \bar{c}_2 t^* - c_1^*\bar{t} \\ \bar{c}_2 t^* \\ c_1^*\bar{t} \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{f}\cdot f \\ f t^* - f\bar{t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} \bar{f}\cdot f \\ f t^* - f\bar{t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{c}_1\cdot c_2^* \\ \bar{c}_1 t^* - c_2^*\bar{t} \\ \bar{c}_1 t^* \\ c_2^*\bar{t} \\ 1 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} \bar{f}\cdot \\ f t^* - \bar{t}\cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ f\bar{t}\, t^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} f\cdot \\ f\bar{t}\, t^*\cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ f t^* - \bar{t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t +$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2y & & & 0 & 0 & 0 \\ 2y & y^2 + \bar{t}\bar{t}\, t^* t^* & & & 0 & & \cdot \\ 0 & 0 & & & 0 & & \cdot \\ 0 & & & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix},$$

$$8\,A_3(21,12) = -\begin{bmatrix} 2f\cdot \\ f\bar{t}\, t^* + f t^*\,\bar{t}\cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2f \\ f\bar{t}\, t^* + f t^*\,\bar{t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t + \tag{118.j}$$

$$\begin{bmatrix} f\cdot(\bar{c}_2 - c_1^*) & -3 \\ \bar{c}_2 \tau^* \; f\cdot\bar{\tau} - c_1^* \bar{\tau} \; f\cdot\tau^* & -y \\ -f\cdot\tau^* & \\ f\cdot\bar{\tau} & \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f\cdot f & \\ f\cdot\bar{\tau} \; f\cdot\tau^* & \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} f\cdot f & \\ f\cdot\bar{\tau} \; f\cdot\tau^* & \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f\cdot(\bar{c}_1 - c_2^*) & +3 \\ \bar{c}_1 \tau^* \; f\cdot\bar{\tau} - c_2^* \bar{\tau} \; f\cdot\tau^* & +y \\ -f\cdot\tau^* & \\ f\cdot\bar{\tau} & \\ 0 & \end{bmatrix}^t ,$$

$$16\, A_4(21,12) = \begin{bmatrix} f\cdot f & \\ f\cdot\bar{\tau} \; f\cdot\tau^* & \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f\cdot f & \\ f\cdot\bar{\tau} \; f\cdot\tau^* & \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix}^t . \qquad (118.k)$$

Die anwendungsbezogenen Betrachtungen sind mit den Formeln (110), (111.a) und (118.a) im wesentlichen abgeschlossen. Die analytischen Integralkerne für die Konfigurationen $\alpha+\alpha$, $\alpha + {}^{16}O$ und ${}^{16}O + {}^{16}O$ sind für Gauß Wechselwirkungen mit Ortsaustausch, für den relativkinetischen Energieoperator und für die Coulomb Wechselwirkung verfügbar. Der eingeschlagene Weg weicht völlig von den bisherigen Methoden ab, die auf der Berechnung der 2-Teilchen - Matrixelemente beruhen. Aber gerade in dieser Abweichung ist ein Grund zu sehen, daß sich die Berechnungen so extrem vereinfachen.

Spezielle Eigenschaften von Systemen identischer Fragmente

In diesem Abschnitt soll noch eine Eigenschaft der Formeln (110), (111.a) und (118.a) im Falle identischer Fragmente hervorgehoben werden. Vermutlich läßt sich diese Eigenschaft genauso allgemein beweisen , wie jene, die in der Behauptung 4.6 diskutiert wurde. Hier jedoch gebe ich nur einen Beweis für die Fragmentierungen $\alpha+\alpha$ und ${}^{16}O + {}^{16}O$.

Behauptung 4.7

Für $\alpha+\alpha$ und ${}^{16}O + {}^{16}O$ gelten zusätzlich zu (87.a) und (87.b) die Identitäten

$$a = j, \quad b = \bar{g}^*, \quad c = \bar{c}^* . \qquad (119)$$

Es sind also nur höchstens 5 der 16 Summanden grundsätzlich verschieden.

Beweis 4.7

Es wird die Frage erörtert, wie die Summanden, die durch die Indizes $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, n_1, n_2$ bzw. $\tilde{n}_1+1$, $\tilde{n}_2+1$, n_1+1, n_2+1 charakterisiert sind, zusammenhängen. Aus (66.b) und (66.d) folgt

$$Q_{\tilde{n}_1+1\ \tilde{n}_2+1\ n_1+1\ n_2+1} = \frac{\exp[\frac{1}{2}(\tilde{t}_{\tilde{n}_1+1} + \tilde{t}_{\tilde{n}_2+1})(t^*_{n_1+1} + t^*_{n_2+1})]}{\exp[\frac{1}{2}(\tilde{t}_{\tilde{n}_1} + \tilde{t}_{\tilde{n}_2})(t^*_{n_1} + t^*_{n_2})]} \cdot Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2} \quad , \tag{120}$$

$$b^*_{i\,\tilde{n}_1+1\ \tilde{n}_2+1\ n_1+1\ n_2+1} = -b^*_{i\,\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2} \quad ,$$

$$\tilde{b}_{i\,\tilde{n}_1+1\ \tilde{n}_2+1\ n_1+1\ n_2+1} = -\tilde{b}_{i\,\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2} \quad , \quad i = 1,2 \ .$$

Aus (66.a) folgt dann mit (60) (121)

$$\left(\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \left| \Lambda_{-t_{\tilde{n}_1+1}, -t_{\tilde{n}_2+1}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1+1}, -\tilde{t}_{\tilde{n}_2+1}} \circ \tilde{T}_G^{(2)} \circ \Lambda_{t_{n_1+1}, t_{n_2+1}} \circ V_{\tilde{t}_{n_1+1}, \tilde{t}_{n_2+1}} \right| x_1 x_2\right)$$

$$= \left(-\tilde{x}_1\ -\tilde{x}_2 \left| \Lambda_{-t_{\tilde{n}_1}, -t_{\tilde{n}_2}} \circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1}, -\tilde{t}_{\tilde{n}_2}} \circ \tilde{T}_G^{(2)} \circ \Lambda_{t_{n_1}, t_{n_2}} \circ V_{\tilde{t}_{n_1}, \tilde{t}_{n_2}} \right| -x_1\ -x_2\right) \cdot$$

$$\frac{\exp[\frac{1}{2}(\tilde{t}_{\tilde{n}_1+1} + \tilde{t}_{\tilde{n}_2+1})(t^*_{n_1+1} + t^*_{n_2+1})]}{\exp[\frac{1}{2}(\tilde{t}_{\tilde{n}_1} + \tilde{t}_{\tilde{n}_2})(t^*_{n_1} + t^*_{n_2})]} \ .$$

Die explizite Form der inversen Überlappmatrix (104.a) läßt für (104.c) und (104.e), also für $\alpha+\alpha$ und $^{16}O + {}^{16}O$, die Schlußfolgerung

$$\hat{\varepsilon}^{-1}_{\nu_1 n_1+1\ \tilde{\nu}_1\tilde{n}_1+1} = (-1)^{\nu_1+\tilde{\nu}_1} \frac{\exp(\tilde{t}_{\tilde{n}_1} \cdot t^*_{n_1})}{\exp(\tilde{t}_{\tilde{n}_1+1} t^*_{n_1+1})} \hat{\varepsilon}^{-1}_{\nu_1 n_1\ \tilde{\nu}_1\tilde{n}_1} \quad , \tag{122}$$

$$(-1)^{\nu_1} := \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{für } \nu_1 = 0\,0\,0 \\ -1 & \text{für } \nu_1 = 1\,1\,m \end{array} \right\} \equiv (-1)^{l}$$

zu, so daß mittels (55) die Gleichungen

$$(x_1|K_{n_1+1\,\tilde{n}_1+1}|\tilde{x}_1)(x_2|K_{n_2+1\,\tilde{n}_2+1}|\tilde{x}_2) = \tag{123}$$

$$(-x_1|K_{n_1\tilde{n}_1}|-\tilde{x}_1)(-x_2|K_{n_2\tilde{n}_2}|-\tilde{x}_2)\ \frac{\exp[\frac{1}{2}(\tilde{t}_{\tilde{n}_1}+\tilde{t}_{\tilde{n}_2})(t^*_{n_1}+t^*_{n_2})]}{\exp[\frac{1}{2}(\tilde{t}_{\tilde{n}_1+1}+\tilde{t}_{\tilde{n}_2+1})(t^*_{n_1+1}+t^*_{n_2+1})]},$$

$$(x_2|K_{n_2+1\,\tilde{n}_1+1}|\tilde{x}_1)(x_1|K_{n_1+1\,\tilde{n}_2+1}|\tilde{x}_2) =$$

$$(-x_2|K_{n_2\tilde{n}_1}|-\tilde{x}_1)(-x_1|K_{n_1\tilde{n}_2}|-\tilde{x}_2)\ \frac{\exp[\frac{1}{2}(\tilde{t}_{\tilde{n}_1}+\tilde{t}_{\tilde{n}_2})(t^*_{n_1}+t^*_{n_2})]}{\exp[\frac{1}{2}(\tilde{t}_{\tilde{n}_1+1}+\tilde{t}_{\tilde{n}_2+1})(t^*_{n_1+1}+t^*_{n_2+1})]}$$

resultieren. Die Kombination der Ergebnisse (121) und (123) führt auf die beiden Gleichungen

$$\int d\mu(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,x_1,x_2) \left\{ \begin{array}{l} (x_1|K_{n_1+1\,\tilde{n}_1+1}|\tilde{x}_1)(x_2|K_{n_2+1\,\tilde{n}_2+1}|\tilde{x}_2) \\ \\ (x_2|K_{n_2+1\,\tilde{n}_1+1}|\tilde{x}_1)(x_1|K_{n_1+1\,\tilde{n}_2+1}|\tilde{x}_2) \end{array} \right\} . \tag{124}$$

$$(\tilde{x}_1\tilde{x}_2|\Lambda_{-t_{\tilde{n}_1+1},-t_{\tilde{n}_2+1}}\circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1+1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2+1}}\circ\tilde{T}_G^{(2)}\circ\Lambda_{t_{n_1+1},t_{n_2+1}}\circ V_{\tilde{t}_{n_1+1},\tilde{t}_{n_2+1}}|x_1x_2)$$

$$= \int d\mu(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,x_1,x_2) \left\{ \begin{array}{l} (x_1|K_{n_1\tilde{n}_1}|\tilde{x}_1)(x_2|K_{n_2\tilde{n}_2}|\tilde{x}_2) \\ \\ (x_2|K_{n_2\tilde{n}_1}|\tilde{x}_1)(x_1|K_{n_1\tilde{n}_2}|\tilde{x}_2) \end{array} \right\} .$$

$$(\tilde{x}_1\tilde{x}_2|\Lambda_{-t_{\tilde{n}_1},-t_{\tilde{n}_2}}\circ V_{-\tilde{t}_{\tilde{n}_1},-\tilde{t}_{\tilde{n}_2}}\circ\tilde{T}_G^{(2)}\circ\Lambda_{t_{n_1},t_{n_2}}\circ V_{\tilde{t}_{n_1},\tilde{t}_{n_2}}|x_1x_2)$$

Somit ist also die Antwort auf die eingangs gestellte Frage gefunden; die in (59) auftretenden Summanden mit den Indizes $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, n_1, n_2$ und $\tilde{n}_1+1, \tilde{n}_2+1$, n_1+1, n_2+1 sind identisch. Hier ging sowohl die Eigenschaft des Wechselwirkungskerns ein, als auch die explizite Gestalt der inversen Überlappmatrix für $\alpha+\alpha$ bzw. $^{16}O + {}^{16}O$. Im Falle zweier verschiedener Fragmente $(\alpha + {}^{16}O)$ besitzt $\hat{\varepsilon}^{-1}$ nicht mehr die erforderliche Eigenschaft, um die Beziehung (124) zu garantieren. Dieses Ergebnis, mit (87. a) kombiniert, schließt den Beweis.

Transformation auf Relativ- und Schwerpunktkoordinaten

In der Diskussion wurden bisher die Schwerpunktkoordinaten z_1' und z_2' der beiden Fragmente verwendet. Diese Schwerpunktkoordinaten treten zwar nicht direkt auf, sondern die Verschiebungen t_1 und t_2, die durch die Weyl Operatoren ins Spiel kamen (siehe (28) und (29)), jedoch besteht laut (28) eine einfache Beziehung zwischen den Schwerpunktkoordinaten und den Verschiebungen.

Über eine orthogonale Transformation gelangt man von den Koordinaten z_1' und z_2' zu der Schwerpunktkoordinate s_2 des Gesamtsystems und zu der Relativkoordinate s_1 der beiden Cluster;

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A}} \begin{bmatrix} \sqrt{A_2} & -\sqrt{A_1} \\ \sqrt{A_1} & \sqrt{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} \qquad (125)$$

Daraus folgt laut (28)

$$s_1 = \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A}}\, t \quad , \qquad (126)$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{A}}\,(A_1 t_1 + A_2 t_2)$$

und somit

$$\tilde{s}_1 s_1^* = \frac{A_1 A_2}{A}\, \tilde{t} t^* \quad , \qquad (127)$$

$$\tilde{s}_1 \tilde{s}_1 = \frac{A_1 A_2}{A}\, \tilde{t} \tilde{t} \quad ,$$

$$s_1^{**}\cdot s_1^{**} = \frac{A_1 A_2}{A}\, t^{**}\cdot t^{**} \quad ,$$

$$\tilde{s}_1\cdot s_1^{*} + \tilde{s}_2\cdot s_2^{*} = A_1 \tilde{t}_1\cdot t_1^{*} + A_2 \tilde{t}_2\cdot t_2^{*} \quad .$$

Da $\tilde{t}\tilde{t}, \tilde{t}\cdot t^{*}$ und $t^{**}\cdot t^{**}$ in dieser einfachen Weise mit der Relativkoordinate in Zusammenhang stehen, sind die bisher angegebenen Formeln bereits im wesentlichen durch diese Relativkoordinate ausgedrückt.
Beachtet man nämlich, daß laut (66.b), (104.b) und (105.b) die Zerlegungen

$$Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2} = \exp(\tilde{t}_{\tilde{n}_1}\cdot t^{*}_{n_1} + \tilde{t}_{\tilde{n}_2}\cdot t^{*}_{n_2})\; Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2}(\tilde{t}\tilde{t}, \tilde{t}\cdot t^{*}, t^{**}\cdot t^{**}) \quad , \qquad (66.b)$$

$$\det(\hat{\varepsilon}) = \exp\Big(\frac{A_1}{4}\,\tilde{t}_1 t_1^{*} + \frac{A_2}{4}\,\tilde{t}_2 t_2^{*}\Big)\; \det(\hat{\varepsilon}(\tilde{t}\cdot t^{*})) \quad , \qquad (104.b)$$

$$\alpha_{n_i\tilde{n}_j} = \exp\Big(\frac{A_1 - 4}{4}\,\tilde{t}_1\cdot t_1^{*} + \frac{A_2 - 4}{4}\,\tilde{t}_2 t_2^{*} + \tilde{t}_{\tilde{n}_j+1} t^{*}_{n_i+1}\Big)\; \alpha_{n_i\tilde{n}_j}(\tilde{t}\cdot t^{*}) \qquad (105.b)$$

gelten und die Matrizen $A(11,22)$, $A(21,12)$, $A_{rel}(11,22)$, $A_{rel}(21,12)$, $A_r(11,22)$ und $A_r(21,12)$ nur von $\tilde{t}\tilde{t}$, $\tilde{t}\cdot t^{*}$, $t^{*}\cdot t^{*}$ abhängen, so erhält man für (110), (111.a) und (118.a) die Separation des Schwerpunktes ;

$$\big((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\;\big|\,\mathcal{O}(\tilde{s}_1,\tilde{s}_2;s_1,s_2)\,\big|\,(\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\big) = \qquad (128)$$

$$\exp(\tilde{s}_2\cdot s_2^{*})\;\big((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\;\big|\,\mathcal{O}(\tilde{s}_1;s_1)\,\big|\,(\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\big) \quad .$$

Dabei gilt hinsichtlich des Relativanteils

für $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}_G = \sum_{s<t} T_G(s,t) = \sum_{s<t} \tilde{T}_G(s,t) \sum_{f''} a_{f''} P_{f''}(s,t)$:

$$\left((\alpha\gamma)^{4j} [4^j] [1^{4j}] \,|\, \mathcal{O}_G(\tilde{s}_1; s_1) \,|\, (\alpha\gamma)^{4j} [4^j] [1^{4j}] \right) = \tag{129}$$

$$\left[\det(\hat{\varepsilon}(\tilde{t}t^*))\right]^2 \sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}} Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2}(\tilde{t}\tilde{t}, \tilde{t}t^*, t^*t^*) \exp[(\frac{A_1A_2}{A} - 1 + (-1)^{\tilde{n}_1+n_1}\delta_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2}\delta_{n_1n_2})\tilde{t}t^*] \cdot$$

$$\Big\{ (3a_{[2]} + 5a_{[11]}) \alpha_{n_1\tilde{n}_1}(\tilde{t}t^*)\ A(11,22)\ \alpha^t_{n_2\tilde{n}_2}(\tilde{t}t^*) \exp[(\tilde{t}_{\tilde{n}_1} - \tilde{t}_{\tilde{n}_2})(t^*_{n_1} - t^*_{n_2})] +$$

$$(3a_{[2]} - 5a_{[11]}) \alpha_{n_2\tilde{n}_1}(\tilde{t}t^*)\ A(21,12)\ \alpha^t_{n_1\tilde{n}_2}(\tilde{t}t^*) \Big\} \quad ,$$

für $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}_{rel} \equiv T_{rel} = \sum_{s<t} T_{rel}(s,t) = \sum_{s<t} \frac{(P_s - P_t)^2}{2Am}$:

$$\left((\alpha\gamma)^{4j} [4^j] [1^{4j}] \,|\, \mathcal{O}_{rel}(\tilde{s}_1; s_1) \,|\, (\alpha\gamma)^{4j} [4^j] [1^{4j}] \right) = \tag{130}$$

$$-\frac{\hbar\omega}{A} \left[\det(\hat{\varepsilon}(\tilde{t}t^*))\right]^2 \sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}} \exp[(\frac{A_1A_2}{A} - 1 + (-1)^{\tilde{n}_1+n_1}\delta_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2}\delta_{n_1n_2})\tilde{t}t^*] \cdot$$

$$\Big\{ 4\, \alpha_{n_1\tilde{n}_1}(\tilde{t}t^*)\ A_{rel}(11,22)\ \alpha^t_{n_2\tilde{n}_2}(\tilde{t}t^*) \exp[(\tilde{t}_{\tilde{n}_1} - \tilde{t}_{\tilde{n}_2})(t^*_{n_1} - t^*_{n_2})]$$

$$- \alpha_{n_2\tilde{n}_1}(\tilde{t}t^*)\ A_{rel}(21,12)\ \alpha^t_{n_1\tilde{n}_2}(\tilde{t}t^*) \Big\} \quad ,$$

für $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}_C = \sum_{s<t} T(s,t)\, U(s,t) = \sum_{s<t} \frac{e^2}{|r_s - r_t|} \left(\frac{1}{2} + \tau_3^s\right)\left(\frac{1}{2} + \tau_3^t\right)$:

$$\left((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\,\middle|\,\mathcal{O}_C(\tilde{s}_1;s_1)\,\middle|\,(\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\right) = \tag{131}$$

$$\frac{e^2}{b\sqrt{2\pi}}\left[\det(\hat{\varepsilon}(\tilde{t}t^*))\right]^2 \sum_{\substack{\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,\\ n_1,n_2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{4} \left(-\frac{f\cdot f}{4}\right)^{\mu} \frac{1}{\left(\mu + r + \frac{1}{2}\right)\mu!} \cdot$$

$$\exp\left[\left(\frac{A_1 A_2}{A} - 1 + (-1)^{\tilde{n}_1+n_1}\,\delta_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2}\,\delta_{n_1n_2}\right)\tilde{t}t^*\right] \cdot$$

$$\Big\{2\,\alpha_{n_1\tilde{n}_1}(\tilde{t}t^*)\; A_r(11,22)\; \alpha^t_{n_2\tilde{n}_2}(\tilde{t}t^*)\; \exp\left[\left(\tilde{t}_{\tilde{n}_1} - \tilde{t}_{\tilde{n}_2}\right)\left(t^*_{n_1} - t^*_{n_2}\right)\right]$$

$$- \alpha_{n_2\tilde{n}_1}(\tilde{t}t^*)\; A_r(21,12)\; \alpha^t_{n_1\tilde{n}_2}(\tilde{t}t^*)\Big\} \quad .$$

Mit den Formeln (128) - (131) stehen die analytischen Ausdrücke der Integralkerne im Bargmann Raum für die Konfigurationen $\alpha+\alpha$, $\alpha + {}^{16}O$ und ${}^{16}O + {}^{16}O$ zur Verfügung. Auf dieser Basis lassen sich die betreffenden Kollisionen unter Berücksichtigung

- der relativkinetischen Energie,
- der mikroskopischen Coulomb Wechselwirkung und
- der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung Gauß'schen Typs (z.B. Brink-Boeker oder Volkov Kräfte)

diskutieren.

Da die Integralkerne aus den beiden O(3)-Skalaren $\tilde{s}_1\cdot\tilde{s}_1$, $s_1^*\cdot s_1^*$ und dem U(3)-Skalar $\tilde{s}_1\cdot s_1^*$ aufgebaut sind, werden sie ganz allgemein durch das im Kapitel 3 in der Gleichung (4) vorausgesetzte Polynom repräsentiert. Wie an dieser Stelle weiter verfahren wird, ist im Kapitel 3 ausgeführt.

Zum Schluß sei noch angemerkt, daß sich für die Konfiguration $\alpha+\alpha$ (j=2) sehr starke Vereinfachungen ergeben. Aus (104.c) und (105.b) folgt, daß nur

die fünfte Komponente der Vektoren $a_{n_i \tilde{n}_j}(\tilde{t}t^*)$ nicht verschwindet. Es spielt also nur das 5,5-Element der Matrizen ${}^{i}{}^{j}A(\ldots)$, $A_{rel}(\ldots)$ und $A_r(\ldots)$ eine Rolle.

Rückblickend erkennt man, daß das eigentliche Problem nur in der Bestimmung der Integralkerne liegt. Aber auf der Grundlage des Konzepts wie es in 4.2 entwickelt wurde und das sollten die Anwendungsbeispiele beweisen, wird die Berechnung nahezu triviál. Die Anwendungen betonen nicht nur die Eleganz und Effizienz der Methode, sondern stellen auch eindeutig unter Beweis, daß in dieser neuen Form die CPTB auch in Fällen schwerer Fragmente den herkömmlichen Methoden (siehe Einleitung) überlegen ist. Zugegeben, die einzelnen Schritte in 4.2 zur Ableitung der Grundformel (61) und der allgemeinen Beziehungen (87.a) und (87.b) sind nicht ganz trivial. Doch die Grundformel selbst besitzt eine sehr einfache Struktur. Wie damit umzugehen ist, kann sehr leicht in 4.3 mittels der Anwendungsbeispiele verfolgt werden. Allein anhand dieser Beispiele sollte man anschließend in der Lage sein, die Integralkerne für noch schwerere Fragmente analytisch zu berechnen.

KAPITEL 5

5. DIE THEORIE DES NORMKERNS

Zuerst möchte ich einen Überblick über wichtige Veröffentlichungen zur Theorie des Normkerns geben.
In vielen Arbeiten [51, 60, 64, 120–123]) sind die vorgeschlagenen Methoden — sei es nun bezüglich 2-Cluster- oder mehr-Cluster-Systeme — auf SU(4)-skalare Fragmente eingeschränkt. Diese Methoden können deshalb nur auf Systeme angewandt werden, in denen das i-te Fragment durch die Orbitpartition $f_i = [4^{j_i}]$, $j_i = 1, 2, \ldots$ beschreibbar ist. In Ref. [124]) wird die Methode ausgedehnt, so daß auch nicht SU(4)-skalare Fragmente Systemkomponenten sein dürfen. Voraussetzung ist allerdings, daß diese dann lediglich eine s-Schalen-Struktur mit der Orbitpartition [b], $1 \leq b \leq 4$ besitzen. Die Diskussion von Binärsystemen in Ref. [125, 126]) ist auf einen s-Schalen-Cluster und ein schweres Fragment mit der Massenzahl $A \leq 24$ oder auf die speziellen Systeme $^6Li + {}^6Li$ und $^{12}C + {}^{12}C$ begrenzt.
Das heißt, daß es zu den Systemen

$$^{16}O + {}^{12+b}X, \quad 0 \leq b \leq 4$$

bzw. zu den Partitionen

$$[4^4] \times [4^3 b] = [4^7 b], \quad 0 \leq b \leq 4,$$

die hier im Mittelpunkt stehen, bislang keinen theoretischen Zugang gibt. Dieser soll in diesem Kapitel verschafft werden. Dazu muß die Kenntnis der in der Diplomarbeit [14]) präsentierten Theorie des Normkerns vorausgesetzt werden. Dort wurden zwei Wege vorgeschlagen, von denen sich der erste in praktischer Hinsicht als schwer begehbar erwies und der zweite Weg wurde beschrieben aber noch nicht beschritten. Jetzt möchte ich genau an der Stelle die Diskussion fortsetzen, an der die Diplomarbeit abbricht. An-

knüpfungspunkt ist die Formel (6.138) in Ref. [14]) für die Eigenwerte des Normoperators. Das Dilemma ist, daß ich im Grunde genommen den gesamten Begriffsapparat, der eigens entwickelt wurde, benötige. Dadurch wird es einigermaßen schwierig, dem Leser eine Einstiegsmöglichkeit zu geben. Ich möchte deshalb so verfahren, daß die im weiteren benötigten Konventionen, Definitionen, Rechenregeln und Sätze zusammengefaßt an den Anfang gestellt werden, so daß sich zumindest formal die weiteren Schritte verfolgen lassen. Anschließend komme ich auf den prinzipiellen Unterschied der beiden Wege kurz zu sprechen, um dann die Formel (6.138) Ref. [14]) zu sezieren und die Racah algebraischen Probleme zu lösen.

5.1 U(3) Racah Algebra

Konvention

Im folgenden werden für die ID von U(3) die lateinischen Buchstaben verwendet. Mit einem griechischen Buchstaben werden die Sublabel, die aus den Untergruppen resultieren, zusammengefaßt.

Beispiel

Im Falle der Gruppenkette

$$U(3) \quad > \quad U(2) \quad > \quad U(1)$$

mit den Darstellungen

$$[h_1 h_2 h_3] \qquad [h_{12} h_{22}] \qquad [h_{11}]$$

wird durch h die ID $[h_1 h_2 h_3]$ von U(3) und durch ρ das sogenannte Gelfand Pattern

$$h \equiv \begin{matrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_{12} & h_{22} \\ h_{11} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} h_1 \geq h_{12} \geq h_2 \geq h_{22} \geq h_3 \\ h_{12} \geq h_{11} \geq h_{22} \end{matrix} \qquad (1.a)$$

ρ

repräsentiert.

Aus h folgt eindeutig die ID von SU(3)

$$(\lambda, \mu) := (h_1 - h_2, h_2 - h_3) \quad . \qquad (1.b)$$

In SU(3) sind alle Pattern, die sich nur durch eine Konstante von (1.a) unter-

scheiden, äquivalent ;

$$\begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_{12} & h_{22} & \\ h_{11} & & \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{ccc} h_1+c & h_2+c & h_3+c \\ h_{12}+c & h_{22}+c & \\ h_{11}+c & & \end{array} \qquad c \geq -h_3 \ . \tag{1.c}$$

In diesem Fall kann für hρ irgendeines dieser äquivalenten Pattern verwendet werden. Insbesondere heißt das auch, daß U(3)-Diagramme, die sich nur durch geschlossene (3-zeilige) Blöcke unterscheiden, äquivalent sind.

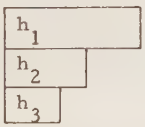
Konjugation

Das zu hρ konjugierte Symbol wird mit $\bar{h}\ \bar{\rho}$ bezeichnet.

Beispiel

Sei

$$h = [h_1 h_2 h_3] \quad \equiv$$



.

Durch Ergänzen von h zu einem geschlossenen 3-zeiligen Block der "Länge" h_1

entsteht das konjugierte Diagramm $\bar{h}$.

Den konjugierten Sublabel erhält man analog dadurch, daß $[h_{12} h_{22}]$ bzw. $[h_{11}]$ zu einem 2-zeiligen bzw. 1-zeiligen Diagramm der "Länge" h_1 ergänzt werden.

Es gilt also zusammengefaßt :

$$\begin{array}{c} \bar{h} \\ \bar{\rho} \end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{ccc} h_1-h_3 & h_1-h_2 & 0 \\ h_1-h_{22} & h_1-h_{12} & \\ h_1-h_{11} & & \end{array} \ , \tag{2.a}$$

wobei in SU(3) die Pattern, die sich nur durch eine Konstante unterscheiden,

äquivalent sind.

In gleicher Weise wie aus h die SU(3)-ID (λ,μ) folgt, läßt sich aus $\bar{h}$ die zu (λ,μ) konjugierte SU(3)-ID $\overline{(\lambda,\mu)}$ gewinnen. Wie leicht nachzuprüfen ist, gilt

$$\overline{(\lambda,\mu)} = (\mu,\lambda) \quad . \tag{2.b}$$

Das 3-(λ,μ)-Symbol

Über die Reduktion eines Kronecker Produkts wurde in Ref. [14] das 3-(λ,μ)-Symbol

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{pmatrix}^{*} \tag{3}$$

eingeführt. Da die Phasenwahl so getroffen wurde, daß die Symbole reell sind, ist die Komplexkonjugation * überflüssig.

Bei einer ungeraden Permutation der Symbolpaare tritt eine reelle Permutationsphase auf, die von den ID a, b, c abhängt [127].

Beispiel

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{j(a)+j(b)+j(c)} \begin{pmatrix} a & c & b \\ \alpha & \gamma & \beta \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$= (-1)^{j(a)+j(b)+j(c)} \begin{pmatrix} b & a & c \\ \beta & \alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

Die Berechnung von j(a) ist in der Diplomarbeit zu finden. Dieser Wert wird aber nie explizit benötigt werden. In der Regel genügt es zu wissen, daß

$$j(a) = j(\bar{a}) \;, \quad j(0) = 0, \text{ für } a = 0; \tag{5}$$

$$2\,j(a), \quad j(a) + j(b) + j(c) \in \mathbb{N}$$

gilt [14].

Das 1-(λ,μ)-Symbol

Das 1-(λ,μ)-Symbol

$$\begin{pmatrix} c \\ \tilde{\gamma}\,\bar{\gamma} \end{pmatrix} := \sqrt{|c|}\, \begin{pmatrix} c & 0 & \bar{c} \\ \tilde{\gamma} & 0 & \bar{\gamma} \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}\,\bar{\gamma} \\ c \end{pmatrix}^{*} \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}\,\bar{\gamma} \\ c \end{pmatrix} \tag{6}$$

ist bis auf einen Faktor ein Spezialfall des 3-(λ,μ)-Symbols. Mit

$$|c| \equiv \dim(c,\,3) \tag{7}$$

ist die Dimension der ID c von U(3) gemeint. Wird das 1-(λ,μ)-Symbol in dieser Weise definiert, so ist es ein reiner Phasenfaktor und es gilt [14])

$$\begin{pmatrix} c \\ \tilde{\gamma}\ \bar{\gamma} \end{pmatrix} = (-1)^{\delta(\bar{\gamma})}\,\delta(\tilde{\gamma},\gamma) \in \mathbb{R} \quad , \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{\gamma}\ \tilde{\gamma} \end{pmatrix} = (-1)^{\delta(\gamma)}\,\delta(\bar{\gamma},\gamma) \in \mathbb{R} \quad .$$

Im weiteren wird auch der explizite Wert von $\delta(\gamma)$ nicht benötigt werden. Die Berechnung von $\delta(\gamma)$ für ein Gelfand Pattern γ ist in der Diplomarbeit dargelegt. Für die Handhabung viel wichtiger sind die Beziehungen

$$(-1)^{\delta(\bar{\gamma})} = (-1)^{\delta(\gamma)}\lambda_c \quad , \qquad \lambda_c = (-1)^{2\,j(c)} \overset{(5)}{=} \lambda_{\bar{c}} \in \mathbb{R} \quad . \tag{9}$$

Insbesondere gilt wegen (5) bezüglich eines 3-(λ,μ)-Symbols

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = 1 \quad . \tag{10}$$

Das gemischte 3-(λ,μ)/1-(λ,μ)-Symbol

Zwischen den beiden gemischten Symbolen

$$\begin{pmatrix} a & b & \bar{\gamma} \\ \alpha & \beta & \bar{c} \end{pmatrix} := \sum_{\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}\ \tilde{\gamma} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \overset{(8)}{=} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} (-1)^{\delta(\gamma)} \quad , \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \bar{c} \\ a & b & \bar{\gamma} \end{pmatrix} := \sum_{\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \tilde{\gamma} \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \tilde{\gamma}\ \bar{\gamma} \end{pmatrix} \overset{(8)}{=} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{pmatrix} (-1)^{\delta(\bar{\gamma})}$$

gilt wegen (9) und (3) die Beziehung

$$\begin{pmatrix} a & b & \bar{\gamma} \\ \alpha & \beta & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \bar{c} \\ a & b & \bar{\gamma} \end{pmatrix} \lambda_c \quad . \tag{12}$$

Ferner gilt das Lemma [128])

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \sum_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} \alpha & \tilde{\alpha} \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \tilde{\beta} \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \tilde{\gamma} \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} = \tag{13}$$

$$\overset{(8)}{=} (-1)^{\delta(\bar{\alpha})+\delta(\bar{\beta})+\delta(\bar{\gamma})} \cdot \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} \quad .$$

Mit dem 1-(λ,μ)-Symbol kann also irgendeiner der 3 Indizes des 3-(λ,μ)-Symbols angehoben bzw. abgesenkt werden.

Das 9-(λ,μ)-Symbol

Das 9-(λ,μ)-Symbol läßt sich über ein Produkt von sechs 3-(λ,μ)-Symbolen berechnen;

$$\begin{Bmatrix} f & \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{f}' & a' & b' \\ \bar{f}'' & a'' & b'' \end{Bmatrix} := \sum_{\cdot} \begin{pmatrix} a' & a'' & \bar{a} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b' & b'' & \bar{b} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} & f \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a' & b' & \bar{f}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a'' & b'' & \bar{f}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{f}' & \bar{f}'' & f \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\overset{14)}{=} \frac{1}{\sqrt{|a|\,|b|\,|f'|\,|f''|\,|f|}} \cdot$$

$$\sum_{\cdot} \langle a' \,.\, a'' \,.\, |a\,.\rangle \langle b' \,.\, b'' \,.\, |b\,.\rangle \langle a \,.\, b \,.\, |f\,.\rangle$$

$$\langle f' \,.\, f'' \,.\, |f\,.\rangle \langle a' \,.\, b' \,.\, |f'\,.\rangle \langle a'' \,.\, b'' \,.\, |f''\rangle \quad .$$

Die Sublabel wurden übersichtshalber durch Punkte ersetzt. Die Summation ist über alle Sublabel durchzuführen.

Unter anderem gelten die Beziehungen [14])

$$\begin{Bmatrix} f & \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{f}' & a' & b' \\ \bar{f}'' & a'' & b'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f & \bar{f}' & \bar{f}'' \\ \bar{a} & a' & a'' \\ \bar{b} & b' & b'' \end{Bmatrix} \quad \text{Diagonalspiegelung} \quad , \tag{15}$$

$$= \begin{Bmatrix} \bar{f} & a & b \\ f' & \bar{a}' & \bar{b}' \\ f'' & \bar{a}'' & \bar{b}'' \end{Bmatrix} \quad \text{Konjugation} \quad .$$

Der U(3) Wigner Koeffizient

Der Wigner Koeffizient, mittels dem $a\alpha$ und $b\beta$ zu $\bar{c}\bar{\gamma}$ gekoppelt werden, kann durch das gemischte 3-(λ,μ)/1-(λ,μ)-Symbol folgendermaßen ausgedrückt werden [14]) :

$$\langle a\alpha\ b\beta \mid \bar{c}\bar{\gamma}\rangle = \tau(a\,b\,\bar{c})\sqrt{|c|}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \bar{c}\\ a & b & \bar{\gamma}\end{pmatrix} \quad . \tag{16}$$

Bei der Umrechnung müssen also ein reeller Phasenfaktor, der durch

$$\tau(a\,b\,\bar{c}) = (-1)^{j(a)-j(b)+j(\bar{c})} \tag{17}$$

gegeben ist (vgl. Ref.[129])), und ein Dimensionsfaktor berücksichtigt werden.

Der reduzierte Wigner Koeffizient

Der U(3) Wigner Koeffizient läßt sich in einen reduzierten Wigner Koeffizienten und einen SU(2)-Koeffizienten zerlegen;

$$\langle h'\rho'\ h''\rho'' \mid h\rho\rangle$$

$$= \left\langle \begin{matrix} h'_1 & h'_2 & h'_3 \\ h'_{12} & h'_{22} \\ h'_{11} \end{matrix} \quad \begin{matrix} h''_1 & h''_2 & h''_3 \\ h''_{12} & h''_{22} \\ h''_{11} \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_{12} & h_{22} \\ h_{11} \end{matrix} \right\rangle \tag{18}$$

$$= \left\langle \begin{matrix} h'_1 & h'_2 & h'_3 \\ h'_{12} & h'_{22} \end{matrix} \quad \begin{matrix} h''_1 & h''_2 & h''_3 \\ h''_{12} & h''_{22} \end{matrix} \;\middle\|\; \begin{matrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_{12} & h_{22} \end{matrix} \right\rangle \cdot$$

$$\left\langle \begin{matrix} h'_{12} & h'_{22} \\ h'_{11} \end{matrix} \quad \begin{matrix} h''_{12} & h''_{22} \\ h''_{11} \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} h_{12} & h_{22} \\ h_{11} \end{matrix} \right\rangle \quad .$$

Diese beiden Typen von Koeffizienten sind in der Literatur verfügbar. Jedoch erschweren die abweichenden Notationen und Phasenkonventionen der verschiedenen Autoren einen Zugriff. Am geeignetsten scheint ein Anschluß an die Standardarbeiten zur SU(3)-und SU(2)-Algebra von Fujiwara und Horiuchi [130] und zur SU(2)-Algebra von Edmonds [129] zu sein. Das sind sehr ausführliche Arbeiten mit einer jeweils durchgehend einheitlichen Notation. Darüber hinaus führt die Methode, die Fujiwara und Horiuchi verwenden, um die Koeffizienten bzw. Symbole zu berechnen, zu sehr einfachen, analytischen Formeln.

In diesem Zusammenhang möchte ich auch auf andere Arbeiten hinweisen, die sich mit der Racah Algebra oder — genauer ausgedrückt— mit der expliziten Berechnung von Koeffizienten befassen.
In den Beiträgen von Hecht [126, 131 - 134]), Reske, Seligman, Zahn [126]), Braunschweig [133]) und de Swart [135]) stehen physikalische Aspekte im Vordergrund. Deshalb werden nur die notwendigen Koeffizienten und Symbole angegeben, die die Lösung des jeweiligen physikalischen Problems erlauben. Diese Koeffizienten/Symbole sind viel zu speziell, so daß auf diese Arbeiten nicht zurückgegriffen werden kann.
Hinsichtlich systematischer Berechnungen sei auf die folgenden Referenzen verwiesen.

<u>3-(λ,μ)-Symbole bzw. Wigner Koeffizienten :</u>
Resnikoff [136]), Sharp und von Baeyer [137]), Moshinsky [138]), Chacón, Ciftan und Biedenharn [139]) und Draayer und Akiyama [140, 141]) ;

<u>6-(λ,μ)-Symbole (Racah Koeffizienten) :</u>
Resnikoff [142]), Moshinsky und Chacón [143]) und Draayer und Akiyama [140, 141]) ;

Die allgemeinsten Arbeiten sind jene von Draayer und Akiyama [140, 141]), die für beliebige Darstellungen (λ,μ) von SU(3) unter Berücksichtigung der Multiplizitäten ein Computerprogramm zur Verfügung stellen [141]), das die 3- bzw. 6-(λ,μ)-Koeffizienten sowohl bezüglich der $SU(3) > SU(2) \times U(1)$ als auch bezüglich der $SU(3) > R(3)$ Kette berechnet. Die einzige Einschränkung ist in Bezug auf die erste Untergruppenkette

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} \leq 32$$

und in Bezug auf die zweite Untergruppenkette

$$\lambda + \mu + L \leq 32 \ .$$

Diese Grenzen werden im vorliegenden Problem aufgrund der hohen Anzahl N von Oszillatorquanten, die in der Relativbewegung stecken, überschritten. Deshalb sollten zunächst die folgenden Möglichkeiten ins Auge gefaßt werden.

1.) Der Modellraum wird so stark eingeschränkt, daß man unterhalb dieser Grenzen bleibt.
2.) Das fremde Programm wird abgeändert.
3.) Das Racah Problem wird analytisch gelöst.

Die Entscheidung fiel zugunsten der 3. Möglichkeit.

Abschließend wird noch eine Vorschrift angegeben, die die bisherige Notation mit der von Fujiwara und Horiuchi verwendeten, verknüpft.

$$\left\langle \begin{matrix} h'_1 & h'_2 & h'_3 \\ h'_{12} & h'_{22} \end{matrix} \quad \begin{matrix} h''_1 & h''_2 & h''_3 \\ h''_{12} & h''_{22} \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_{12} & h_{22} \end{matrix} \right\rangle = \langle (\lambda', \mu')p'q' \; (\lambda'', \mu'')p''q'' \| (\lambda, \mu)pq \rangle \; ;$$

$$\begin{matrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_{12} & h_{22} \end{matrix} \longrightarrow (\lambda\, \mu)pq \qquad (19)$$

$$\lambda = h_1 - h_2 \; ,$$

$$\mu = h_2 - h_3 \; ,$$

$$p = h_1 - h_{12} \; ,$$

$$q = h_2 - h_{22} \; .$$

Der Bezug zur Edmond'schen Notation lautet :

$$\left\langle \begin{matrix} h'_{12} & h'_{22} \\ h'_{11} \end{matrix} \quad \begin{matrix} h''_{12} & h''_{22} \\ h''_{11} \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} h_{12} & h_{22} \\ h_{11} \end{matrix} \right\rangle = \langle j'm' \; j''m'' \mid j\, m \rangle \; ;$$

$$\begin{matrix} h_{12} & h_{22} \\ h_{11} \end{matrix} \longrightarrow j\, m \qquad (20)$$

$$j = \frac{1}{2}(h_{12} - h_{22}) \; ,$$

$$m = \frac{1}{2}(h_{12} - h_{22}) - (h_{12} - h_{11}) \; .$$

Damit sind die Formeln zusammengefaßt, die im wesentlichen benötigt werden. Hinsichtlich sämtlicher Beweise und weiterer Relationen sei nochmals nachdrücklich auf Ref. [14] verwiesen. Dort werden auch wie bereits erwähnt zwei verschiedene Wege beschrieben, um das Eigenwertproblem des Normoperators zu lösen.

5.2 U(3) Racah Algebra des Normkerns

Der 1. Weg führt innerhalb des Eingangskanals (Ausgangskanals) zu einer Kopplung der U(3)-ID p ($\bar{p}$) der Relativbewegung und der U(3)-ID h ($\bar{h}$) der Fragmente zu $\bar{c}$ (c) .

	1. Kopplungsschema
Eingangskanal	$p \times h \longrightarrow \bar{c}$
Ausgangskanal	$\bar{p} \times \bar{h} \longrightarrow c$

(21)

Der Nachteil dieser Methode liegt darin, daß aus einem Normkern mit dem Gelfand Pattern höchsten Gewichts mittels Absteigeoperatoren weitere Kerne, die durch andere Gelfand Pattern charakterisiert sind, konstruiert werden müssen. Da bereits die Ausdrücke höchsten Gewichts für die Systeme

$$^{16}O + {}^{12+b}X , \quad 0 \leq b \leq 4$$

sehr unhandlich sind, ist dieser Weg sehr mühsam zu begehen. Für ein durch den Parameter b fixiertes System müssen insgesamt 5-b Normkerne bekannt sein. Davon müssen 4-b aus jenem höchsten Gewichts über einen Absteigeoperatorformalismus konstruiert werden. Für die 5 Systeme sind also insgesamt 15 verschiedene Normkernausdrücke erforderlich, von denen nur die 5 mit dem höchsten Gewicht noch relativ einfach zu berechnen sind.

Der 2. Weg, den ich hier weiter verfolgen möchte, führt zu einem anderen Kopplungsschema.

	2. Kopplungsschema
Fragmente	$h \times \bar{h} \longrightarrow k$
Relativbewegung	$p \times \bar{p} \longrightarrow \bar{k}$

(22)

Die U(3)-ID der Fragmente, die im Eingangskanal durch h und im Ausgangskanal durch $\bar{h}$ gegeben sind, werden zu k gekoppelt. Außerdem werden die U(3)-ID p bzw. $\bar{p}$ der Relativbewegung im Ein- bzw. Ausgangskanal zu $\bar{k}$ gekoppelt. Der zweite Weg ist insofern einfacher, als es nun genügt, die Normkerne höchsten Gewichts zu kennen. Die Schwierigkeiten, mit denen man aufgrund des erforderlichen Absteigeoperatorformalismus auf dem

1. Weg konfrontiert wird, sind jetzt gänzlich auf ein Racah algebraisches Problem abgewälzt worden. Die Racah algebraische Struktur ist deshalb das wesentliche Merkmal der Formel für die Eigenwerte des Normkerns [14];

$$EV(N,W;b) = \sum_{k,\omega,\tilde{\omega}} \frac{\begin{pmatrix} \omega & p & \varkappa \\ p & \tilde{\omega} & k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \bar{\varkappa} & \rho & h \\ \bar{k} & h & \rho \end{pmatrix}} \begin{Bmatrix} 0 & c & \bar{c} \\ k & p & \bar{p} \\ \bar{k} & h & \bar{h} \end{Bmatrix} \sqrt{|c| \cdot |k|^3} \; (-1)^{\delta(\bar{\varkappa})} \qquad (23)$$

$$\cdot (p\tilde{\omega} \mid \mathcal{N}_{h\rho\ h\rho} \mid p\omega) \quad .$$

Bemerkungen zur Eigenwertformel :

Zunächst ist hervorzuheben, daß die Eigenwerte EV(N, W; b) lediglich von zwei U(3)-Quantenzahlen und einem Parameter abhängen. Der Parameter $0 \leq b \leq 4$ legt das System fest. Als Quantenzahlen treten die U(3)-ID [N00] der Relativbewegung und der U(3)-Kopplungsmodus $b \leq W \leq 4$ (siehe Kapitel 3) auf. Damit ist sofort ersichtlich, daß die Normkerne im U(3)-Schema diagonal und die Eigenwerte in bezug auf den Drehimpuls hochgradig entartet sind. Diese Eigenschaft des Normkerns wird auch in den Arbeiten [51, 60, 64, 120 - 126] ausgenutzt. Die eigentliche Ursache dieses Sachverhalts liegt, solange man sich im Rahmen translationsinvarianter Oszillatorzustände bewegt, in der Kompatibilität der Label der U(3)-Gruppe und der orbitalen Permutationsgruppe [144].

Strukturell setzt sich die Formel aus dem Quotienten zweier gemischten 3-(λ,μ)/1-(λ,μ)-Symbole, einem 9-(λ,μ)-Symbol, zwei Dimensionsfaktoren und einem Phasenfaktor zusammen. Aufgrund der U(3)-Skalareigenschaft läßt sich das 9-(λ,μ)-Symbol auch durch ein 6-(λ,μ)-Symbol ausdrücken. Dieser rein Racah algebraische Anteil wird mit einem Element des Normoperators $\mathcal{N}_{h\rho\ h\rho}$ in der Gelfand Basis multipliziert. In den Koeffizienten und dem Summationsbereich ist noch das Kopplungsschema (22) zu erkennen. Interessant ist an dieser Formel, daß der Sublabel ρ des Normoperators frei wählbar ist. Zweckmäßigerweise wird nun das Gelfand Pattern höchsten Gewichts gewählt. In diesem Fall sind die Elemente des Normoperators relativ leicht zu berechnen. Außerdem vereinfacht sich dadurch auch das algebraische Problem, das nun gelöst werden soll.

Das algebraische Problem

Zunächst müssen für die Systeme

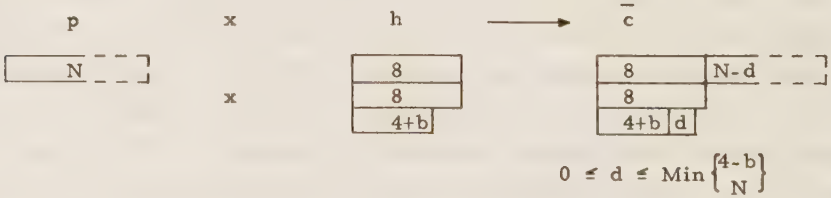
$$^{16}O + {}^{12+b}X, \qquad 0 \leq b \leq 4$$

die expliziten Darstellungen, die in der Formel (23) auftreten, ermittelt werden. Da für die Symbole die SU(3)-Symmetrie relevant ist, kann man von der Äquivalenzrelation (1.c) Gebrauch machen.

U(3)-Symmetrie der		(24)
Fragmente :	$h \equiv [8\ 8\ 4+b]$	$\xrightarrow{(2.a)}\ \bar{h} \equiv [4-b\ 0\ 0]$
Relativbewegung :	$p \equiv [N\ 0\ 0]$	$\xrightarrow{(2.a)}\ \bar{p} \equiv [N\ N\ 0]$

Das 9-(λ, μ)-Symbol schreibt nun vor, wie die Darstellungen c und k (bzw. $\bar{c}$ und $\bar{k}$) zu berechnen sind.

Beispiel



$$0 \leq d \leq \mathrm{Min}\begin{Bmatrix} 4-b \\ N \end{Bmatrix}$$

$$[N\ 0\ 0] \quad \mathbf{x} \quad [8\ 8\ 4+b] \qquad [8+N-d\ \ 8\ \ 4+b+d]$$

Die Substitution W = 4-d führt auf das Ergebnis :

$$\begin{array}{lll} \bar{c} \equiv [N+W+4\ \ 8\ \ 8+b-W] & \overset{(1.c)}{\sim} & [N+W\ \ 4\ \ 4+b-W] \\ \quad \downarrow (2.a) & & \\ c \equiv [N+2W-4-b\ \ N+W-4\ \ 0] & \overset{(1.c)}{\sim} & [N+W-b\ \ N\ \ 4-W] \end{array} \qquad (25)$$

$$4 \geq W \geq \mathrm{Max}\begin{Bmatrix} b \\ 4-N \end{Bmatrix} \geq 0 \quad .$$

Dieses Ergebnis läßt sich auch aus der Vorschrift

$$\bar{p} \quad x \quad \bar{h} \longrightarrow c$$

ableiten.

Verfährt man in der gleichen Weise, so folgt aus

$$p \quad x \quad \bar{p} \longrightarrow \bar{k}: \qquad \bar{k} \equiv [2N-n\ N\ n], \qquad 0 \le n \le N; \quad (26.a)$$

$$h \quad x \quad \bar{h} \longrightarrow k: \qquad k \equiv [12-b-m\ 8\ 4+b+m], \quad 0 \le m \le 4-b. \quad (26.b)$$

Da k und $\bar{k}$ in SU(3) konjugierte Darstellungen sind, muß laut (2.b)

$$N - n = 4 - b - m \qquad (26.c)$$

gelten. Daraus folgt letzten Endes

$$\bar{k} \equiv [N+4-b-m\ N\ N-4+b+m] \overset{(1.c)}{\sim} k \equiv [12-b-m\ 8\ 4+b+m],$$

$$4-b \ge m \ge \mathrm{Max}\begin{Bmatrix} 4-b-N \\ 0 \end{Bmatrix} . \qquad (27)$$

Ich wende mich zunächst der Bestimmung der beiden gemischten Symbole in (23) zu. In der Literatur werden nur für Standardkoeffizienten analytische Ausdrücke angegeben. Deshalb sind zunächst Umformungen erforderlich. Es gilt: (28)

$$\begin{pmatrix} \bar{\varkappa} & \rho & h \\ \bar{k} & h & \rho \end{pmatrix} \overset{(11)}{=} \begin{pmatrix} \bar{\varkappa} & \rho & \bar{\rho} \\ \bar{k} & h & \bar{h} \end{pmatrix} (-1)^{\delta(\rho)} \overset{\substack{(3)\\(13)}}{=} \begin{pmatrix} \varkappa & \bar{\rho} & \rho \\ k & \bar{h} & h \end{pmatrix} (-1)^{\delta(\varkappa)+\delta(\bar{\rho})+2\delta(\rho)}$$

$$\overset{\substack{(11)\\(8)}}{=} \begin{pmatrix} \varkappa & \bar{\rho} & \bar{h} \\ k & \bar{h} & \bar{\rho} \end{pmatrix} (-1)^{\delta(\varkappa)} \overset{\substack{(16)*)}}{=} \langle k\varkappa\ \bar{h}\bar{\rho} \,|\, \bar{h}\bar{\rho} \rangle \frac{(-1)^{\delta(\bar{\varkappa})}}{\sqrt{|h|}} \tau(k\,\bar{h}\,\bar{h}) .$$

*) : Im letzten Schritt wurde noch ausgenutzt, daß das auftretende 3-(λ,μ)-Symbol in obiger Gleichungskette mittels (9) und (10) den folgenden Schluß zuläßt:

$$1 = \lambda_{\bar{k}} \cdot \lambda_h \cdot \lambda_{\bar{h}} = \lambda_{\bar{k}} \Longrightarrow (-1)^{\delta(\varkappa)} = (-1)^{\delta(\bar{\varkappa})} . \qquad (29)$$

Ferner folgt:

$$\begin{pmatrix} \omega & p & \varkappa \\ p & \tilde{\omega} & k \end{pmatrix} \overset{(11)}{=} \begin{pmatrix} \omega & \bar{\tilde{\omega}} & \varkappa \\ p & \bar{p} & k \end{pmatrix} (-1)^{\delta(\tilde{\omega})} \overset{(3)\sim(5)}{=} \begin{pmatrix} \varkappa & \omega & \bar{\tilde{\omega}} \\ k & p & \bar{p} \end{pmatrix} (-1)^{\delta(\tilde{\omega})} \overset{(11)}{=} \begin{pmatrix} \varkappa & \omega & p \\ k & p & \tilde{\omega} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{(16)\\|p| = |\bar{p}|}}{=} \langle k\varkappa\ \ p\omega \ |\ p\tilde{\omega} \rangle \tau(k\,p\,p) \frac{1}{\sqrt{|p|}} . \qquad (30)$$

Wird für ρ das Gelfand Pattern höchsten Gewichts gewählt, so ist wegen

$$\begin{matrix} h \\ \rho \end{matrix} \equiv \begin{matrix} 8 & 8 & 4+b \\ & 8 & 8 \\ & & 8 \end{matrix} \xrightarrow{(2.a)} \begin{matrix} \bar{h} \\ \bar{\rho} \end{matrix} \equiv \begin{matrix} 4-b & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{matrix} \overset{(1.c)}{\sim} \begin{matrix} 12-b & 8 & 8 \\ & 8 & 8 \\ & & 8 \end{matrix} \qquad (31)$$

auch das Pattern $\varkappa$ festgelegt, zumal gemäß der Summenregel in irgendeiner Zeile des Wigner Koeffizienten die Summe der Zahlen (d.h. der Diagrammkästchen) in bra und ket identisch sein muß. Es gilt also

$$\langle k\varkappa\, \bar{h}\,\bar{\rho} \mid \bar{h}\,\bar{\rho}\rangle = \left\langle \begin{matrix} 12-b-m & 8 & 4+b+m & 4-b & 0 & 0 \\ & 8 & & & 0 & 0 \\ & & 8 & & & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 12-b & 8 & 8 \\ & 8 & 8 \\ & & 8 \end{matrix} \right\rangle \qquad (32)$$

$$\overset{(18)\sim(20)}{=} \langle (4-b-m, 4-b-m)\ 4-b-m\ 0\ \ (4-b, 0)\ 4-b\ 0 \parallel (4-b, 0)\ 4-b\ 0\rangle \ .$$

Hier wurde berücksichtigt, daß der SU(2)-Koeffizient identisch 1 ist [129]. Da $\varkappa$ in dieser Weise festgelegt ist (Gelfand Pattern höchsten Gewichts), muß $p\omega$ zu $p\tilde{\omega}$ äquivalent sein, so daß unter Beachtung der Bedingungen in (1.a) die Gleichung

$$\langle k\varkappa\ \ p\omega \mid p\tilde{\omega}\rangle = \left\langle \begin{matrix} 12-b-m & 8 & 4+b+m & N & 0 & 0 \\ & 8 & & \tilde{A} & & 0 \\ & & 8 & & \tilde{B} & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N+8 & 8 & 8 \\ \tilde{A}+8 & & 8 \\ & \tilde{B}+8 & \end{matrix} \right\rangle$$

$$\overset{(18)\sim(20)}{=} \langle (4-b-m, 4-b-m)\ 4-b-m\ 0\ \ (N, 0)\ N-\tilde{A}\ 0 \parallel (N, 0)\ N-\tilde{A}\ 0\rangle \qquad (33)$$

$$N \geq \tilde{A} \geq \tilde{B} \geq 0$$

resultiert. Wiederum ist der SU(2)-Koeffizient identisch 1 [129]. Durch die Umformungen (28) und (30) bin ich in der Tat zu speziellen reduzierten Wigner Koeffizienten (32) und (33) gelangt, für die in der Arbeit von Fujiwara und Horiuchi [130] einfache, analytische Ausdrücke angegeben sind. Aus (28) und (30) erhält man unter Berücksichtigung von (17), (32) und (33) die Gleichung

(34.a)

$$\frac{\begin{pmatrix} \omega & p & \varkappa \\ p & \tilde{\omega} & k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \bar{\varkappa} & \rho & h \\ \bar{k} & h & \rho \end{pmatrix}} (-1)^{\delta(\bar{\varkappa})} = \frac{\langle (4-b-m, 4-b-m)\ 4-b-m\ 0\ \ (N, 0) N-\tilde{A}\ 0 \parallel (N, 0) N-\tilde{A}\ 0\rangle}{\langle (4-b-m, 4-b-m)\ 4-b-m\ 0\ \ (4-b, 0) 4-b\ 0 \parallel (4-b, 0) 4-b\ 0\rangle} \sqrt{\frac{|h|}{|p|}},$$

$$4 \geq b \geq 0\ ; \quad 4-b \geq m \geq \mathrm{Max}\left\{ \begin{matrix} 4-b-N \\ 0 \end{matrix} \right\}, \quad 4 \geq W \geq \mathrm{Max}\left\{ \begin{matrix} b \\ 4-N \end{matrix} \right\}, \quad N \geq \tilde{A} \geq 0$$

und schließlich unter Verwendung der analytischen Ausdrücke nach längerer Rechnung

$$= \sqrt{\frac{(10-2b-m)!\ m!}{(N+6-b-m)!\ (N-4+b+m)!}} \cdot \frac{\tilde{A}!}{(4-b)!\ (5-b-m)} \cdot \tag{34.b}$$

$$\sum_{u=0}^{\mathrm{Min}\left\{\substack{4-b-m \\ \tilde{A}}\right\}} (-1)^u \cdot \frac{(N-u)!\ (5-b-m+u)!}{(\tilde{A}-u)!\ u!\ (u+1)!\ (4-b-m-u)!} \cdot$$

Berücksichtigt wurde, daß für die Dimensionen der beiden Darstellungen von U(3) mittels der in der Monographie angegebenen Formel [15]) die Gleichungen

$$|p| = \frac{(N+1)(N+2)}{2} , \qquad |h| = \frac{(6-b)(5-b)}{2} \tag{35.a}$$

resultieren. Für spätere Zwecke werden auch gleich die Dimensionen von c und k angegeben;

$$|c| = \frac{(W-b+1)(N+W-3)(N+2W-b-2)}{2} , \quad |k| = (5-b-m)^3 . \tag{35.b}$$

Etwas aufwendiger wird die Berechnung des 9-(λ,μ)-Symbols in der Formel (23) werden. Auch hierzu sind zunächst Umformungen auf Standardkoeffizienten erforderlich. Aus der Gleichung (14) folgt mit den Identitäten $|0| = 1$ und $|c| = |\bar{c}|$

(36)

$$\begin{Bmatrix} 0 & c & \bar{c} \\ k & p & \bar{p} \\ \bar{k} & h & \bar{h} \end{Bmatrix} = \sum_{\substack{\omega,\rho,\gamma,\varkappa, \\ \tilde{\omega},\tilde{\rho},\tilde{\gamma},\tilde{\varkappa}}} \langle p\omega\ \ h\rho \mid \bar{c}\,\bar{\gamma}\rangle \langle \bar{p}\tilde{\omega}\ \ \bar{h}\tilde{\rho} \mid c\tilde{\gamma}\rangle \langle \bar{c}\,\bar{\gamma}\ \ c\tilde{\gamma} \mid 0\ 0\rangle \cdot$$
$$\langle p\omega\ \ \bar{p}\tilde{\omega} \mid \bar{k}\bar{\varkappa}\rangle \langle h\rho\ \ \bar{h}\tilde{\rho} \mid k\tilde{\varkappa}\rangle \langle \bar{k}\,\bar{\varkappa}\ \ k\tilde{\varkappa} \mid 0\ 0\rangle \cdot \frac{1}{|c||k|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(|c|\,|k|)^3}} \sum_{\substack{\omega,\rho,\gamma,\varkappa, \\ \tilde{\omega},\tilde{\rho}}} \langle p\omega\ \ h\rho \mid \bar{c}\,\bar{\gamma}\rangle \langle \bar{p}\tilde{\omega}\ \ \bar{h}\tilde{\rho} \mid c\gamma\rangle \cdot$$
$$\langle p\omega\ \ \bar{p}\tilde{\omega} \mid \bar{k}\,\bar{\varkappa}\rangle \langle h\rho\ \ \bar{h}\tilde{\rho} \mid k\varkappa\rangle (-1)^{\delta(\bar{\gamma})+\delta(\bar{\varkappa})} .$$

Beim Übergang zur letzten Gleichung wurden die beiden Beziehungen

$$\langle \bar{c}\,\bar{\gamma} \quad c\tilde{\gamma} \mid 0\ 0 \rangle \underset{(5),(4)}{\overset{(16),(17),}{=}} (-1)^{2j(c)} \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & 0 & \tilde{\gamma} \\ \bar{c} & 0 & c \end{pmatrix} \underset{(9)}{\overset{(6),(8),}{=}} \frac{(-1)^{\delta(\bar{\gamma})}}{\sqrt{|c|}}\,\delta(\bar{\gamma},\gamma)\ , \tag{37}$$

$$\langle \bar{k}\,\bar{\varkappa} \quad k\tilde{\varkappa} \mid 0\ 0 \rangle = \frac{(-1)^{\delta(\bar{\varkappa})}}{\sqrt{|k|}}\,\delta(\bar{\varkappa},\varkappa)$$

verwendet. Mittels der Umformungen (38)∼(40)

$$\langle p\omega \quad h\rho \mid \bar{c}\,\bar{\gamma} \rangle \underset{(3)\sim(5)}{\overset{(16),(11),}{=}} \begin{pmatrix} \gamma & \omega & \rho \\ c & p & h \end{pmatrix} \cdot (-1)^{\delta(\bar{\gamma})} \cdot \tau(p\,h\,\bar{c}) \cdot \sqrt{|c|} \tag{38}$$

$$\underset{(17),(9)}{\overset{(11),(16),}{=}} \langle c\gamma \quad p\omega \mid \bar{h}\,\bar{\rho} \rangle \sqrt{\frac{|c|}{|h|}} \cdot (-1)^{\delta(\bar{\rho})+\delta(\gamma)}\ ,$$

$$\langle p\omega \quad \bar{p}\tilde{\omega} \mid \bar{k}\,\bar{\varkappa} \rangle \underset{(3),(4)}{\overset{(16),(11),}{=}} \begin{pmatrix} \tilde{\omega} & \omega & \varkappa \\ \bar{p} & p & k \end{pmatrix} (-1)^{j(p)+j(\bar{p})+j(k)} \cdot \tau(p\,\bar{p}\,\bar{k}) \cdot (-1)^{\delta(\bar{\varkappa})} \sqrt{|k|}$$

$$\underset{(5),(9),(17)}{\overset{(11),(16),}{=}} \langle \bar{p}\tilde{\omega} \quad p\omega \mid \bar{k}\,\bar{\varkappa} \rangle \ (-1)^{j(k)-2j(p)}\ , \tag{39}$$

$$\langle h\rho \quad \bar{h}\tilde{\rho} \mid k\varkappa \rangle \overset{(39)}{=} \langle \bar{h}\tilde{\rho} \quad h\rho \mid k\,\varkappa \rangle (-1)^{j(\bar{k})-2j(h)} \tag{40}$$

$$\overset{(38)}{=} \langle \bar{k}\,\bar{\varkappa} \quad \bar{h}\,\tilde{\rho} \mid \bar{h}\,\bar{\rho} \rangle \sqrt{\frac{|\bar{k}|}{|h|}} \quad (-1)^{\delta(\bar{\rho})+\delta(\bar{\varkappa})+j(\bar{k})-2j(h)}$$

und unter Berücksichtigung der Aussagen (5),(8)∼(10) läßt sich (36) abändern:

$$\begin{Bmatrix} 0 & c & \bar{c} \\ k & p & \bar{p} \\ \bar{k} & h & \bar{h} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|c|\,|k|\,|h|} \sum_{\substack{\omega,\rho,\gamma,\varkappa, \\ \tilde{\omega},\tilde{\rho}}} \langle c\gamma \quad p\omega \mid \bar{h}\,\bar{\rho} \rangle \langle \bar{p}\tilde{\omega} \quad \bar{h}\tilde{\rho} \mid c\gamma \rangle \cdot \tag{41}$$
$$\langle \bar{p}\tilde{\omega} \quad p\omega \mid \bar{k}\,\bar{\varkappa} \rangle \langle \bar{k}\,\bar{\varkappa} \quad h\tilde{\rho} \mid \bar{h}\,\bar{\rho} \rangle\ .$$

Als nächstes muß das Ziel angestrebt werden, die in (41) auftretenden Wigner Koeffizienten zu konkretisieren. Dazu genügt es, sich die Darstellungen unter (24),(25) und (27) in Erinnerung zu rufen und die Ungleichungen in (1.a) sowie die bereits erwähnte Summenregel zu beachten. Unter

diesen Rahmenbedingungen folgt :

$$\langle c\gamma \;\; p\omega \mid \bar{h}\,\bar{\rho}\rangle = \left\langle \begin{matrix} N+W-b & N & 4-W \\ N+p & & \tilde{q} \\ & & \tilde{r} \end{matrix} \;\; \begin{matrix} N & 0 & 0 \\ q' & 0 & \\ r' & & \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 4-b+N & N & N \\ q+N & N & \\ r+N & & \end{matrix} \right\rangle , \tag{42}$$

$$\tilde{q} = N+q-p-q' , \qquad W-b \geq p \geq 0 ,$$
$$\tilde{r} = N+r-r' ; \qquad N \geq \tilde{q} \geq 4-W ,$$
$$N+p \geq \tilde{r} \geq \tilde{q} ,$$
$$N \geq q' \geq r' ,$$
$$4-b \geq q \geq r \geq 0 ,$$
$$q \geq p ;$$

$$\langle \bar{p}\tilde{\omega} \;\; \bar{h}\tilde{\rho} \mid c\gamma\rangle = \left\langle \begin{matrix} N & N & 0 \\ N & u & \\ v & & \end{matrix} \;\; \begin{matrix} 4-b & 0 & 0 \\ q'' & 0 & \\ s & & \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} N+W-b & N & 4-W \\ N+p & & \tilde{q} \\ & & \tilde{r} \end{matrix} \right\rangle , \tag{43}$$

$$\tilde{q} = u+q''-p , \qquad N \geq v \geq u \geq 0 ,$$
$$\tilde{r} = v+s ; \qquad 4-b \geq q'' \geq s \geq 0 ,$$
$$q'' \geq p ;$$

$$\langle \bar{p}\tilde{\omega} \;\; p\omega \mid \bar{k}\bar{\varkappa}\rangle = \left\langle \begin{matrix} N & N & 0 \\ N & u & \\ v & & \end{matrix} \;\; \begin{matrix} N & 0 & 0 \\ q' & 0 & \\ r' & & \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} N+4-b-m & N & N-4+b+m \\ N+x & & N-y \\ & z & \end{matrix} \right\rangle , \tag{44}$$

$$q' = N+x-y-u , \qquad 4-b-m \geq x \geq 0 ,$$
$$r' = z-v ; \qquad 4-b-m \geq y \geq 0 ,$$
$$N+x \geq z \geq N-y \geq u ;$$

$$\langle \bar{k}\bar{\varkappa} \;\; \bar{h}\tilde{\rho} \mid \bar{h}\,\bar{\rho}\rangle = \left\langle \begin{matrix} N+4-b-m & N & N-4+b+m \\ N+x & & N-y \\ & z & \end{matrix} \;\; \begin{matrix} 4-b & 0 & 0 \\ q'' & 0 & \\ s & & \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 4-b+N & N & N \\ q+N & N & \\ r+N & & \end{matrix} \right\rangle ,$$

$$q'' = q-x+y , \qquad q \geq x . \tag{45}$$
$$z = N+r-s ;$$

Werden nun die abhängigen Größen $\tilde{q}, \tilde{r}, q', r', q'', z$ eliminiert, so ergeben sich für die verbleibenden Variablen die Summationsgrenzen

$$
\begin{array}{lcccl}
 & 4-b-m & \geq x \geq & 0 & , \\
 & 4-b & \geq q \geq & x & , \\
\mathrm{Min}\left\{\begin{matrix}4-b-m\\4-b-q+x\end{matrix}\right\} & & \geq y \geq & 0 & , \\
 & N-y & \geq u \geq & \mathrm{Max}\left\{\begin{matrix}x-y\\0\end{matrix}\right\} & , \\
\mathrm{Min}\left\{\begin{matrix}W-b\\q\\q-x+y\\q+u+W-x+y-4\end{matrix}\right\} & & \geq p \geq & \mathrm{Max}\left\{\begin{matrix}0\\-N+q+u-x+y\end{matrix}\right\} & , \\
 & q & \geq r \geq & 0 & , \\
\mathrm{Min}\left\{\begin{matrix}r+y\\q-x+y\end{matrix}\right\} & & \geq s \geq & \mathrm{Max}\left\{\begin{matrix}0\\r-x\end{matrix}\right\} & , \\
\mathrm{Min}\left\{\begin{matrix}N+r-s\\N+p-s\\N\end{matrix}\right\} & & \geq v \geq & \mathrm{Max}\left\{\begin{matrix}u\\r-s+u-x+y\\-p+q-s+u-x+y\end{matrix}\right\} & .
\end{array}
\tag{46}
$$

Die U(3) Wigner Koeffizienten (42)$\sim$(45) lassen sich den Umformungen (18)$\sim$(20) folgend in reduzierte Wigner Koeffizienten und SU(2)-Koeffizienten umformen. Nach dem Einsetzen in (41) präsentiert sich das 9-(λ,μ)-Symbol wie folgt :

$$
\left\{\begin{matrix}0 & c & \bar{c}\\ k & p & \bar{p}\\ \bar{k} & h & \bar{h}\end{matrix}\right\}
\underset{(24),\,(25),\,(27)}{\overset{(1.b),}{=\!=}}
\left\{\begin{matrix}(0,0) & (W-b,N+W-4) & (N+W-4,W-b)\\ (4-b-m,4-b-m) & (N,0) & (0,N)\\ (4-b-m,4-b-m) & (0,4-b) & (4-b,0)\end{matrix}\right\}
=\!=
$$

$$
4 \geq W \geq \mathrm{Max}\left\{\begin{matrix}b\\4-N\end{matrix}\right\} ,
$$

$$
4-b \geq m \geq \mathrm{Max}\left\{\begin{matrix}4-b-N\\0\end{matrix}\right\} ,
$$

$$
4 \geq b \geq 0 ;
$$

allg.

$$\frac{1}{|c|\,|k|\,|h|}\cdot\sum_{\substack{x,q,y,u,\\ p,r,s,v;}} \tag{47.a}$$

$$\langle (W-b, N+W-4)\,W-b-p\;\; N+p-q-u+x-y\quad (N,0)\,u-x+y\;\; 0 \,\|\, (4-b,0)\,4-b-q\;\; 0\rangle$$

$$\cdot\langle (0,N)\,0\;\; N-u\quad (4-b,0)\,4-b-q+x-y\;\; 0 \,\|\, (W-b, N+W-4)\,W-b-p\;\; N+p-q-u+x-y\rangle$$

$$\cdot\langle (0,N)\,0\;\; N-u\quad (N,0)\,u-x+y\;\; 0 \,\|\, (4-b-m, 4-b-m)\,4-b-m-x\;\; y\rangle$$

$$\cdot\langle (4-b-m, 4-b-m)\,4-b-m-x\;\; y\quad (4-b,0)\,4-b-q+x-y\;\; 0 \,\|\, (4-b,0)\,4-b-q\;\; 0\rangle$$

$$\cdot\left\langle \frac{N+2p-q-u+x-y}{2}\quad \frac{-N-q+2s-u+2v+x-y}{2}\quad \frac{N-u+x-y}{2}\quad \frac{N+2r-2s+u-2v-x+y}{2} \,\middle|\, \frac{q}{2}\quad \frac{-q+2r}{2}\right\rangle$$

$$\cdot\left\langle \frac{N-u}{2}\quad \frac{-N-u+2v}{2}\quad \frac{q-x+y}{2}\quad \frac{-q+2s+x-y}{2} \,\middle|\, \frac{N+2p-q-u+x-y}{2}\quad \frac{-N-q+2s-u+2v+x-y}{2}\right\rangle$$

$$\cdot\left\langle \frac{N-u}{2}\quad \frac{-N-u+2v}{2}\quad \frac{N-u+x-y}{2}\quad \frac{N+2r-2s+u-2v-x+y}{2} \,\middle|\, \frac{x+y}{2}\quad \frac{2r-2s-x+y}{2}\right\rangle$$

$$\cdot\left\langle \frac{x+y}{2}\quad \frac{2r-2s-x+y}{2}\quad \frac{q-x+y}{2}\quad \frac{-q+2s+x-y}{2} \,\middle|\, \frac{q}{2}\quad \frac{-q+2r}{2}\right\rangle \quad .$$

Die Koeffizienten, die in der Gleichung (47. a) auftreten, können durch analytische Ausdrücke [130]) ersetzt werden. Nach einer längeren Rechnung ergibt sich die Fortsetzung :

explizit

$$N^{b,m,N,W}\cdot\sum_{\substack{x,q,y,u,\\ p,r,s,v}} P^{b,m,N,W}_{x,q,y,u,p,r,s,v} \tag{47.b}$$

$$\cdot\sum_{a_1}(-1)^{a_1}\binom{N+W+p-3+a_1}{a_1}\binom{N+W-b+1+p-q-u+x-y}{W-b-p-a_1}\binom{4-b-p-a_1}{4-b-q}$$

$$\cdot\sum_{a_2}(-1)^{a_2}\binom{N+p-q-u+x-y}{N+p-q+r-s-v+a_2}\binom{q-r}{a_2}\binom{r}{q-p-a_2}$$

$$\cdot \sum_{a_3} (-1)^{a_3} \binom{N+W-b+1}{u+a_3}^{-1} \binom{N+W+p-3}{W+u-4+a_3} \binom{q-p+y-x}{a_3}$$

$$\cdot \sum_{a_4} (-1)^{a_4} \binom{N-v}{s-p+a_4} \binom{v-u}{q-s+y-x-a_4} \binom{p}{a_4}$$

$$\cdot \sum_{a_5} (-1)^{a_5} \binom{u+a_5}{a_5} \binom{N+5-b-m-u-a_5}{5-b-m+y} \binom{5-b-m+x}{N+1-u+x-a_5}$$

$$\cdot \sum_{a_6} (-1)^{a_6} \binom{N-y-u}{N+r-s-v-x+a_6} \binom{x+s-r}{a_6} \binom{y+r-s}{x-a_6}$$

$$\cdot \sum_{a_7} (-1)^{a_7} \binom{q-x}{a_7} \binom{5-b-m+y}{x+y+a_7+1} \binom{9-2b-m}{4-b-x-a_7}^{-1}$$

$$\cdot \sum_{a_8} (-1)^{a_8} \binom{q-x}{a_8} \binom{x}{q-r-a_8} \binom{y}{x-q+s+a_8} \quad ,$$

$$N^{b,m,N,W} := \frac{4(-1)^N}{(N+W-b+2)(4-W)!} \sqrt{\frac{2(9-2b-m)!}{(6-b-m+N)!(N+b+m-4)!m!}} \cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{(N+2W-b-2)(N+W-3)^3(W-b+1)^3(5-b-m)^7(10-2b-m)}} \quad ,$$

$$P^{b,m,N,W}_{x,q,y,u,p,r,s,v} := (-1)^{p+q+u+x} \quad \frac{(x+y+1)(N+2p-q-u+x-y+1)}{(5-b-m+x)!(q-x)!}$$

$$\cdot (4-b+x-y-q)!(u-x+y)!(q-p)!s!(p-q+s-u+v+x-y)!$$

$$\cdot (N+p-s-v)!(N+r-s-v)!(s-r+v-u+x-y)!(q-s+y-x)! \quad ,$$

Summationsgrenzen der a_i :

$$
\begin{aligned}
0 &\leq a_1 \leq \operatorname{Min}\left\{\begin{matrix} W-b-p \\ q-p \end{matrix}\right\}, \\
\operatorname{Max}\left\{\begin{matrix} q-p+s-r+v-N \\ q-p-r \\ 0 \end{matrix}\right\} &\leq a_2 \leq \operatorname{Min}\left\{\begin{matrix} q-p \\ q-r \\ s-r+v-u+x-y \end{matrix}\right\}, \\
\operatorname{Max}\left\{\begin{matrix} 4-W-u \\ 0 \end{matrix}\right\} &\leq a_3 \leq q-p+y-x, \\
\operatorname{Max}\left\{\begin{matrix} q-s+u-v+y-x \\ p-s \\ 0 \end{matrix}\right\} &\leq a_4 \leq \operatorname{Min}\left\{\begin{matrix} N+p-s-v \\ q-s+y-x \\ p \end{matrix}\right\}, \\
\operatorname{Max}\left\{\begin{matrix} N+b+m-4-u \\ 0 \end{matrix}\right\} &\leq a_5 \leq N-u-y, \\
\operatorname{Max}\left\{\begin{matrix} s-r+v+x-N \\ s-r+x-y \\ 0 \end{matrix}\right\} &\leq a_6 \leq \operatorname{Min}\left\{\begin{matrix} s-r+v-u+x-y \\ s-r+x \\ x \end{matrix}\right\}, \\
0 &\leq a_7 \leq \operatorname{Min}\left\{\begin{matrix} 4-b-m-x \\ q-x \end{matrix}\right\}, \\
\operatorname{Max}\left\{\begin{matrix} q-s-x \\ q-r-x \\ 0 \end{matrix}\right\} &\leq a_8 \leq \operatorname{Min}\left\{\begin{matrix} q-s+y-x \\ q-r \\ q-x \end{matrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

Auf diesem Wege habe ich die benötigten Symbole numerisch berechnet und tabelliert. Da die Tabellen sehr umfangreich sind, wird darauf verzichtet, sie hier wiederzugeben. Zum Test fand eine Überprüfung der Orthonormalitätsrelationen statt, die die 9-(λ, μ)-Symbole erfüllen müssen.
Anzumerken ist, daß die dargelegte Berechnungsmethode nicht unbedingt die eleganteste ist. Aber sie führt zum Ziel! Eleganter wäre es, Rekursionsformeln zu suchen. Doch diese dürften nicht so einfach zu finden sein, da die benötigten Symbole von 4 Parametern (N, W, b, m) abhängen, von denen einer (N) unbegrenzt wächst. Um über die Kollisionen auch in quantitativer Hinsicht physikalisch relevante Aussagen machen zu können, muß der Modellraum und somit der Parameter N genügend groß gewählt werden. Das hat

zur Folge, daß die zu berechnenden Symbole sehr bizarr werden. Die Schwierigkeiten, die sich daraus ergeben, wurden bereits in 5.1 diskutiert.

Mit den Formeln (34.b), (35.b) und (47.b), (46) ist das Racah algebraische Problem in der Eigenwertgleichung (23) gelöst, sofern noch berücksichtigt wird, daß wegen (27) und (33) die Summation über k, ω und $\tilde{\omega}$ entsprechend

$$\sum_{k,\omega,\tilde{\omega}} \quad = \quad \sum_{\tilde{A}=0}^{N} \sum_{\tilde{B}=0}^{\tilde{A}} \sum_{m=\mathrm{Max}\left\{\begin{smallmatrix}0\\4-b-N\end{smallmatrix}\right\}}^{4-b} \tag{48}$$

zu ersetzen ist. Das verbleibende Problem ist die Berechnung der Elemente des Normoperators (49)

$$(p\tilde{\omega}|\mathcal{N}_{h\rho\ h\rho}|p\omega) = \left(\begin{matrix} N & 0 & 0 \\ & \tilde{A} & 0 \\ & & \tilde{B} \end{matrix} \middle| \mathcal{N}_{\begin{smallmatrix} 8 & 8 & 4+b & 8 & 8 & 4+b \\ & 8 & 8 & & 8 & 8 \\ & & 8 & & & 8 \end{smallmatrix}} \middle| \begin{matrix} N & 0 & 0 \\ & \tilde{A} & 0 \\ & & \tilde{B} \end{matrix} \right)$$

in der Gelfand Basis.

5.3 Die Elemente des Normoperators in der Gelfand Basis

In Ref. [14]) wurde gezeigt, daß der Kern des Normoperators aus den Elementen der modifizierten Überlappmatrix $\hat{\varepsilon}$ berechnet werden kann;

$$\mathcal{N}_{\begin{smallmatrix} 8 & 8 & 4+b & 8 & 8 & 4+b \\ & 8 & 8 & & 8 & 8 \\ & & 8 & & & 8 \end{smallmatrix}}(\bar{t}_1, \bar{t}_2; t_1, t_2) = (\det \hat{\varepsilon}(3,3))^{4-b} (\det \hat{\varepsilon})^{b} \tag{50}$$

Hier ist $\hat{\varepsilon}(3,3)$ die Matrix, die durch Streichen der 3. Zeile und 3. Spalte aus $\hat{\varepsilon}$ entsteht. Dieser Kern des Normoperators höchsten Gewichts läßt sich also sehr leicht berechnen und lautet nach der Transformation auf Relativ- und Schwerpunktkoordinaten [14]):

$$\mathcal{N}_{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}}^{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2; s_1, s_2) = \mathcal{N}_{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}}^{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}}(\tilde{s}_1; s_1) \cdot \exp(\tilde{s}_2 s_2^*) \quad ,$$

$$\mathcal{N}_{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}}^{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}}(\tilde{s}_1; s_1) = \exp[(16\,\frac{12+b}{28+b} - 12 + b)\mathbf{x}] \cdot \tag{51}$$

$$\cdot \left[q_2(x)\, q_1(x)^2 + a(\tilde{s}_{1_-} s_{1_-}^* + \tilde{s}_{1_0} s_{1_0}^*)(q_2(x) - x^2 - x q_2(x))\, q_1(x) \right]^{4-b}$$

$$\cdot \left[q_6(2x) + q_6(-2x) - 4q_6(x) - 4q_6(-x) - x^2 q_4(x) - x^2 q_4(-x) \right]^b \quad ,$$

$$x := a\tilde{s}_1 \cdot s_1^* \quad ,$$

$$a := \frac{28+b}{16(12+b)} \quad .$$

Man hat es also mit einem Kern vom allgemeinen Typ (52)

$$\mathcal{N}_{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}}^{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}}(\tilde{s}_1; s_1) = \sum_{\nu,\nu_+} a_{\nu\nu_+} \frac{(\tilde{s}_{1_-} s_{1_-}^* + \tilde{s}_{1_0} s_{1_0}^*)^{\nu}}{\nu!} \frac{(\tilde{s}_{1_+} s_{1_+}^*)^{\nu_+}}{\nu_+!}$$

mit reellen Entwicklungskoeffizienten $a_{\nu\nu_+}$ zu tun. Die Elemente des Normoperators in der Gelfand Basis können über eine Integration im Bargmann Raum aus diesem Kern berechnet werden;

$$\left(\begin{matrix} N & 0 & 0 \\ \tilde{A} & 0 & \\ & \tilde{B} & \end{matrix} \middle| \mathcal{N}_{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}}^{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}} \middle| \begin{matrix} N & 0 & 0 \\ \tilde{A} & 0 & \\ & \tilde{B} & \end{matrix} \right) = \tag{53}$$

$$\int \left(\begin{matrix} N & 0 & 0 \\ \tilde{A} & 0 & \\ & \tilde{B} & \end{matrix} \middle| \tilde{s}_1 \right) \mathcal{N}_{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}}^{\substack{8\ 8\ 4+b\\ 8\ 8\\ 8}}(\tilde{s}_1; s_1) \left(s_1 \middle| \begin{matrix} N & 0 & 0 \\ \tilde{A} & 0 & \\ & \tilde{B} & \end{matrix} \right) d\mu(\tilde{s}_1, s_1) .$$

Hierzu sind lediglich unter Verwendung des Gewichts g des Gelfand Patterns die Zustandsfunktionen zu konstruieren ;

$$g = (\tilde{B}, \tilde{A}-\tilde{B}, N-\tilde{A}) \longrightarrow \left(s_1 \left| \begin{matrix} N & 0 & 0 \\ & \tilde{A} & 0 \\ & & \tilde{B} \end{matrix} \right. \right) = \frac{s_1^{\tilde{B}} \; s_1^{\tilde{A}-\tilde{B}} \; s_1^{N-\tilde{A}}}{\sqrt{\tilde{B}!\;(\tilde{A}-\tilde{B})!\;(N-\tilde{A})!}} \quad . \tag{54}$$

Die Ausführung der Integration (siehe Gleichung 4.(56)) ergibt :

$$\left(\begin{matrix} N & 0 & 0 \\ & \tilde{A} & 0 \\ & & \tilde{B} \end{matrix} \right| \mathcal{N}_{\substack{8 \; 8 \; 4+b \; 8 \; 8 \; 4+b \\ 8 \; 8 \qquad 8 \; 8 \\ 8 \qquad\quad 8}} \left| \begin{matrix} N & 0 & 0 \\ & \tilde{A} & 0 \\ & & \tilde{B} \end{matrix} \right) = = \; a_{\tilde{A}\; N-\tilde{A}} \quad . \tag{55}$$

Die Elemente des Normoperators in der Gelfand Basis können also durch Entwickeln des Normkerns (51) gemäß (52) berechnet werden. Numerisch ist das leicht zu bewerkstelligen, so daß endgültig die Eigenwerte an Hand der Formel (23) berechnet werden können. Die Ergebnisse wurden bereits im 3. Kapitel präsentiert und diskutiert.

Rückblickend erkennt man sofort einen weiteren Vorteil der hier beschriebenen Methode zur Berechnung der Eigenwerte des Normoperators. Die Aufgabe ist zerlegbar in einen Racah algebraischen und einen den Normkern höchsten Gewichts betreffenden Teil. Durch die Verlagerung der Hauptschwierigkeit auf die Racah Algebra wurde es möglich, die Eigenwertprobleme einer ganzen Serie von Systemen gleichzeitig zu lösen. Das läßt aber immer noch nicht den ganzen Vorteil erkennen, der in diesem Verfahren liegt. Zunächst ist offensichtlich, daß die Racah algebraische Struktur identisch ist für alle Systeme, bei denen dieselbe Fragmentsymmetrie vorliegt wie in den diskutierten Kollisionen

$$^{16}O + {}^{12+b}X \; , \qquad 0 \leq b \leq 4 \quad .$$

Da sich die SU(3)-Fragmentsymmetrie nicht ändert, wenn ^{16}O durch ein anderes SU(3)-skalares Fragment ersetzt wird, ist in dieser Arbeit auch gleichzeitig das Racah algebraische Problem z.B. der Systeme

$$\alpha + {}^{12+b}X \quad \text{und} \quad {}^{40}Ca + {}^{12+b}X \; , \quad 0 \leq b \leq 4$$

gelöst worden. Lediglich die Normkerne höchsten Gewichts müssen in diesen

Fällen neu berechnet werden. Aber das ist eine sehr einfache Aufgabe. Für die Kollisionen $^{40}Ca + {}^{12+b}X$ dürfte es vorteilhafter sein, die 9-(λ,μ)-Symbole auf einer rekursiven Basis zu berechnen; denn in diesen Kollisionen treten sehr hohe Werte für N auf und mit der vorgestellten Methode nimmt mit N auch die Rechenzeit zu, um die entsprechenden Koeffizienten zu berechnen. Aber selbstverständlich reichen die bereits berechneten Koeffizienten für die Systeme $\alpha + {}^{12+b}X$ vollständig aus.

ZUSAMMENFASSUNG

Mit einer Zusammenfassung im üblichen Sinn möchte ich hier nicht schliessen, da die Kapitel 2 und 3 eine entsprechende Nebenfunktion besitzen. Deshalb soll dieses Resumé nur den Charakter einer stichwortartigen Rekapitulation erhalten. Viel nützlicher scheint mir zu sein, jenen, die auf diesem Gebiet weiterarbeiten wollen, Orientierungshilfen zu geben und die Ziele zu setzen, die mit den hier erarbeiteten Grundlagen greifbar geworden sind.

Nach der Skizzierung der gängigsten Betrachtungsweisen zum Phänomen der nuklearen Molekülresonanzen im Kapitel 1 wurde hierzu im Kapitel 2 ein mikroskopisches Modell entwickelt. Dieses Modell beruht auf der Idee, Kernreaktionen durch U(3)-Quantenzahlen zu beschreiben. Es stellte sich heraus, daß das Verhalten der kollidierenden Fragmente durch ein U(3)-Prinzip, in dem das Pauli Prinzip enthalten ist, geprägt wird. Mit diesem U(3)-Prinzip läßt sich erklären, warum nur manche Binärsysteme zur Molekülbildung neigen. Darüber hinaus wurden aus diesem U(3)-Prinzip Auswahlregeln abgeleitet, die vorhersagen, in welchen Systemen nukleare Molekülresonanzen auftreten können. Eine Auswertung der Regel führt auf die Tabelle 2.3 .
In diesem Zusammenhang fiel der Begriff der U(3)-Barriere, die in dem mikroskopischen Modell eine entscheidende Rolle spielt und eine Repulsion zwischen den beiden Fragmenten bewirkt. Diesem repulsiven Effekt, das zeigen die mikroskopischen Rechnungen im Kapitel 3, steht die bindende Wirkung der erlaubten U(3)-Kanäle gegenüber. Bei entsprechender Ausgewogenheit ist das Resultat ein Gebilde, das aus zwei molekular gebundenen Fragmenten besteht.
Weitere Begriffe wie U(3)-Kanal-Set und U(3)-Kopplungsmod fielen. Die U(3)-Kanäle, die zu einem U(3)-Kanal-Set gehören, sehen in der Regel unterschiedlich hohe U(3)-Barrieren. Durch die Einführung der U(3)-Kopplungsmod-

quantenzahl W im Kapitel 3 wurde es möglich, die U(3)-Kanäle innerhalb eines U(3)-Kanal-Sets zu klassifizieren. Diese Quantenzahl W mit gruppentheoretischem Ursprung (siehe Kapitel 5) hat wichtige physikalische Bedeutungen. Jeder Quantenzahl W entspricht eine U(3)-Barriere der Höhe $W \cdot \hbar\omega$. U(3)-Kanäle, die diese Quantenzahl tragen, können nur oberhalb dieser Barriere existieren, unterhalb sind sie verboten. Die Quantenzahl W ist ferner ein Maß für den Bosonencharakter und ein Maß für die Deformation des Systems.

Die Auswahlregeln, die in dieser Arbeit formuliert wurden, geben nur die minimale U(3)-Barriere in einem System an. Aus der Erörterung folgt aber, daß es wichtig ist, die verschiedenen Höhen der Barrieren innerhalb eines Sytems zu kennen. Deshalb möchte ich als erstes Ziel vorschlagen, den Beweis zu diesen Auswahlregeln zu verfeinern. Am zweckmäßigsten dürfte es sein, die Diagrammkopplungen numerisch durchzuführen. Auf diese Weise können in einem beliebigen System alle Barrierenhöhen bestimmt werden. (Eine alternative, weitaus aufwendigere Methode — die Lösung des Eigenwertproblems des Normoperators in der U(3)-Basis — liefert ebenfalls die Information über sämtliche Barrierenhöhen (siehe Kapitel 3 und 5).) Damit ist auch sofort das Redundanzproblem in den mikroskopischen Rechnungen gelöst ; denn es bedarf nur der Elimination der verbotenen U(3)-Kanäle. Im Kapitel 3 wurden für die speziellen Systeme $^{16}O + {}^{12+b}X$, $0 \leq b \leq 4$, für die im Kapitel 2 nukleare Molekülresonanzen vorhergesagt wurden, die Ergebnisse der Eigenwertprobleme der Normoperatoren zusammengefaßt. Nachzutragen ist an dieser Stelle, daß erst nachträglich der experimentelle Beweis erbracht wurde, daß auch in der Kollision $^{16}O + {}^{15}N$ der molekulare Resonanzmechanismus existiert[145]. Ein Vergleich mit den Eigenwerten der Systeme $\alpha+\alpha$ und $\alpha+{}^{16}O$, bei denen keine Molekülbildung beobachtet wurde, enthüllt charakteristische Unterschiede, die sich auch im Verhalten der Systeme widerspiegeln.

Eine Analyse mikroskopischer Rechnungen für die beiden Systeme $\alpha+\alpha$ und $^{16}O + {}^{16}O$ (Kapitel 3) untermauert das mikroskopische Modell. Zur Durchführung der mikroskopischen Rechnungen bedurfte es einer Weiterentwicklung der Composite Particle Theorie im Bargmann Raum. Zu diesem Zweck

wurde im Kapitel 4 eine Art Dichtematrixformalismus vorgestellt, mittels dessen für Binärsysteme mit Fragmenten geschlossener Schalen die Wechselwirkungsintegralkerne für eine große Klasse von Wechselwirkungen konstruiert werden können.

Interessant ist, daß zu diesem Dichtematrixformalismus ein zweiter Zugang existiert, der eine einfache Interpretation erlaubt. Die Skizzierung dieses zweiten Zugangs in einer dualen Basis bedürfte eines weiteren, sehr umfangreichen Kapitels und wurde deshalb in diese Schrift nicht aufgenommen.

Diese zweite Möglichkeit zeigt, daß die eigentliche Idee, die diesem Dichtematrixformalismus zugrunde liegt, auf der Konstruktion der Kerne zweier Projektionsoperatoren im Bargmann Raum beruht. An Hand dieser beiden Kerne lassen sich über eine Integration aus dem modifizierten Kern der Wechselwirkung im Bargmann Raum die even-und odd-Anteile herausprojizieren, also jene Anteile, die auf die symmetrischen bzw. antisymmetrischen Nukleonenpaare im Orbitraum zurückzuführen sind. Als Resultat erhält man den gesuchten Wechselwirkungsintegralkern.

Mit Anwendungsbeispielen wird im Kapitel 4 demonstriert, wie effektiv diese Methode arbeitet. Durch die direkte Berechnung der Integralkerne — ohne den Umweg über 2-Teilchen-Matrixelemente — ist diese Methode den bisherigen weit überlegen. Dieser vorgeschlagene Weg hat außerdem die angenehme Eigenschaft, für ein vorgegebenes Binärsystem auf den Wechselwirkungsintegralkern in einer Form zu führen, in der auch die Integralkerne aller leichteren Binärsysteme enthalten sind. Gezeigt wurde dies explizit am Beispiel $^{16}O + {}^{16}O$ wodurch auch gleichzeitig die leichteren Binärsysteme $\alpha + {}^{16}O$ und $\alpha+\alpha$ abgehandelt wurden.

Deshalb ist das nächste Ziel, das ich diesbezüglich vorschlagen möchte, im Rahmen dieser erweiterten Composite Particle Theorie, basierend auf der Ausgangsformel 4.(61), das System $^{40}Ca + {}^{40}Ca$ zu berechnen. Damit lassen sich auch gleichzeitig alle Binärsysteme berechnen, die aus den Fragmenten α, ^{16}O oder ^{40}Ca aufgebaut sind. Da es sich dabei nur um die Anwendung der erarbeiteten Grundlagen handelt, ist dieses Ziel sofort erreichbar.

Ein Drittes Ziel, das ich sehe, besteht darin, die Grundformel 4.(61) so zu erweitern, daß die Binärsysteme $^{4n}X + {}^{4m}Y$, $n, m = 1, 2, \ldots$ berechenbar werden. Dazu bedarf es vermutlich nur eines Eingriffes bei dem Input der

1-Teilchen-Überlappmatrizen, so daß die vollständige Theorie auch für diese Systeme bereits in dieser Arbeit formuliert ist. D.h. insbesondere, daß, ausgehend von dem System $^{40}Ca + {}^{40}Ca$, auch die Integralkerne sämtlicher Binärsysteme $n, m \leq 10$ in der Lösung enthalten sind.

Im Kapitel 5 wurde das Racah algebraische Problem der Normkerne der Systeme $^{16}O - {}^{12+b}X$, $0 \leq b \leq 4$ analytisch gelöst. Die notwendigen 3- und 9-(λ, μ)-Symbole sind als analytische Ausdrücke angegeben. Mit diesem Werkzeug konnten die Eigenwerte der Normoperatoren dieser Systeme relativ einfach berechnet werden.
Ein viertes Ziel, das sich hier bietet, ist die Berechnung der Systeme $\alpha + {}^{12+b}X$, $0 \leq b \leq 4$. Da lediglich der U(3)-Skalar ^{16}O ersetzt wird, bleibt das Racah Problem dasselbe. Deshalb können für diese Systeme die Ergebnisse aus dem Kapitel 5 voll übernommen werden. Lediglich die Berechnung der Normoperatoren in der Gelfand Basis ist neu durchzuführen. Das ist aber weitaus weniger aufwendig als für die hier diskutierten Systeme. Auch die Kollisionen $^{40}Ca + {}^{12+b}X$, $0 \leq b \leq 4$ können völlig analog untersucht werden. Da ^{40}Ca wiederum ein U(3)-Skalar ist, ändert sich am algebraischen Teil nichts. Jedoch ist es in diesem Fall zweckmäßig, die Berechnung der 9-(λ, μ)-Symbole auf einer rekursiven Basis durchzuführen und nicht mit der Formel, die im Kapitel 5 abgeleitet wurde. Etwas aufwendiger ist in diesen Fällen die Berechnung der Normoperatoren in der Gelfand Basis.

Zuletzt möchte ich , angesichts der zahlreichen Vorteile, die die Composite Particle Theorie inzwischen bietet , dazu anregen, die Streutheorie im Bargmann Raum zu formulieren, um nicht nur auf quasigebundene Rechnungen angewiesen zu sein.

ANHANG

A. BEWEIS DER GLEICHUNG 4.(9.c)

1.) Der in 4.(9.c) gegebene Operator wird in Tensoren i-ter Stufe zerlegt :

$$U(s,t) = \sum_{i=0}^{2} U^{i}(s,t) \qquad (A.1)$$

$$U^{0}(s,t) = \frac{1}{4}\,\mathbb{1} + \frac{1}{3}\,\tau^{s}\cdot\tau^{t} = \frac{1}{6}(\tau^{s}+\tau^{t})^{2} \qquad (A.2)$$

$$U^{1}(s,t) = \frac{1}{2}(\tau^{s}+\tau^{t})_{3} \qquad (A.3)$$

$$U^{2}(s,t) = \frac{1}{3}(3\,\tau^{s}_{3}\tau^{t}_{3} - \tau^{s}\cdot\tau^{t}) \quad . \qquad (A.4)$$

2.) Im Falle antisymmetrischer 4j-Teilchen-Zustände der Bahnsymmetrie $f = [4^{j}]$ in bra und ket, entspricht die zugehörige Symmetrie $\hat{f} = [4^{\hat{j}}] = [j^{4}]$ im Spin-Isospinraum einem SU(4)-Skalar. Es gilt also $(S,T) = (0,0)$. Deshalb spielt nur der Tensor 0-ter Stufe eine Rolle und $U(s,t)$ darf durch $U^{0}(s,t)$ ersetzt werden.

3.) Durch Anwendung der fractional parentage Methode im Spin-Isospinraum lassen sich von einem A-Teilchen-Zustand die beiden letzten Teilchen abspalten:

$$\left|\gamma^{A}\,\hat{f}\,(\hat{f}'(\hat{r}')\,\hat{f}'')\;S\;T\right) = \qquad (A.5)$$

$$\sum_{S',T',S'',T''} \left|\gamma^{A-2}\,\hat{f}'(\hat{r}')\;S'T'\right)\left|\gamma^{2}\,\hat{f}''\;S''\;T''\right)\langle \hat{f}'\;S'T'\;\hat{f}''\;S''T'' \mid \hat{f}\;S\;T\rangle .$$

Wird diese Abspaltung in bra und ket durchgeführt, so findet man :

$$\left(\gamma^{A}\,\hat{\hat{f}}\,(\hat{f}'(\hat{r}')\,\hat{f}'')\;\bar{S}\;\bar{T}\;\left|U^{0}(A-1,A)\right|\;\gamma^{A}\,\hat{f}\,(\hat{f}'(\hat{r}')\,\hat{f}'')\;S\;T\right) = \qquad (A.6)$$

$$\sum_{\substack{\tilde{S}'', \tilde{T}'', \\ S'', T'', S', T'}} \langle \hat{f}\tilde{S}\tilde{T} \,|\, \hat{f}' S'T' \; \hat{f}'' \tilde{S}''\tilde{T}'' \rangle \langle \hat{f}' S'T' \; \hat{f}'' S''T'' \,|\, \hat{f} S T \rangle$$

$$\cdot \left(\gamma^2 \hat{f}'' \tilde{S}''\tilde{T}'' \,\middle|\, U^0(A-1,A) \,\middle|\, \gamma^2 \hat{f}'' S''T'' \right) \quad .$$

4.) Laut 2.) gilt in hiesiger Betrachtung

$$\hat{f}\tilde{S}\tilde{T} = \hat{f} S T = [j^4]\,0\,0 \equiv [j^4] \quad . \tag{A.7}$$

In diesem Fall können die fractional parentage Koeffizienten (cfp) nur von 0 verschieden sein, wenn

$$S'T' = \tilde{S}''\tilde{T}'' = S''T'' \quad \text{und} \quad \hat{f}' = \hat{f}''^{\,c} \tag{A.8}$$

gilt. Dadurch vereinfacht sich A.6 zu

$$\left(\gamma^{4j} [j^4] \, (\hat{f}'(\hat{r}')\hat{f}'') \,\middle|\, U^0(A-1,A) \,\middle|\, \gamma^{4j} [j^4] \, (\hat{f}'(\hat{r}')\hat{f}'') \right) = \tag{A.9}$$

$$\sum_{S'T'} |\langle [j^4]\,0\,0 \,|\, \hat{f}' S'T' \; \hat{f}'' S'T' \rangle|^2 \left(\gamma^2 \hat{f}'' S'T' \,\middle|\, U^0(A-1,A) \,\middle|\, \gamma^2 \hat{f}'' S'T' \right).$$

5.) Die notwendigen cfp sind in Ref. [146]) zu finden ;

cfp	$\hat{f}'$	$\hat{f}''$	$[4^{\widehat{j-1}}2]\,\widehat{[2]}$		$[4^{\widehat{j-2}}33]\,\widehat{[11]}$	
$\hat{f}$	S	T	1 0	0 1	0 0	1 1
$\widehat{[4^j]}$	0	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\sqrt{\frac{9}{10}}$

(A.10)

Die Auswertung der beiden Fälle $\hat{f}'' = \widehat{[2]}$ und $\widehat{[11]}$, die der Abspaltung eines symmetrischen bzw. antisymmetrischen Bahnpaares entsprechen, führt auf sehr einfache Ergebnisse ;

$\hat{f}'' = \widehat{[2]}$:

$$\left(\gamma^{4j} [j^4] \, ([4^{\widehat{j-1}}2]\,(\hat{r}')\,\widehat{[2]}) \,\middle|\, U^0(A-1,A) \,\middle|\, \gamma^{4j} [j^4] \, ([4^{\widehat{j-1}}2]\,(\hat{r}')\,\widehat{[2]}) \right) = \tag{A.11}$$

$$\frac{1}{12} \Big\{ \left(\gamma^2 \widehat{[2]}\,1\,0 \,\middle|\, (\tau^{A-1} + \tau^A)^2 \,\middle|\, \gamma^2 \widehat{[2]}\,1\,0 \right) +$$

$$\left(\gamma^2 \widehat{[2]}\,0\,1 \,\middle|\, (\tau^{A-1} + \tau^A)^2 \,\middle|\, \gamma^2 \widehat{[2]}\,0\,1 \right) \Big\} = \frac{1}{6} = : a_{[2]}$$

$\underline{\hat{f}'' = \widehat{[11]}}$:

$$\left(\gamma^{4j}\,[j^4]\,(\widehat{[4^{j-2}33]}\,(\hat{r}')\,\widehat{[11]})\;\middle|\;U^0(A-1,A)\;\middle|\;\gamma^{4j}\,[j^4]\,(\widehat{[4^{j-2}33]}\,(\hat{r}')\,\widehat{[11]})\right) \qquad (A.12)$$

$$= \left\{ \frac{1}{60}\left(\gamma^2\,\widehat{[11]}\,0\,0\;\middle|\;(\tau^{A-1}+\tau^{A})^{2}\;\middle|\;\gamma^2\,\widehat{[11]}\,0\,0\right) + \right.$$

$$\left. \frac{9}{60}\left(\gamma^2\,\widehat{[11]}\,1\,1\;\middle|\;(\tau^{A-1}+\tau^{A})^{2}\;\middle|\;\gamma^2\,\widehat{[11]}\,1\,1\right) \right\} = \frac{3}{10} =: a_{[11]}$$

Einsetzen der reduzierten Ausdrücke A.11 und A.12 in die Gleichung 4.(7) führt auf

$$\left((\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\;\middle|\;\sigma\;\middle|\;(\alpha\gamma)^{4j}\,[4^j]\,[1^{4j}]\right) = \qquad (A.13)$$

$$\frac{\binom{4j}{2}}{|[4^j]|} \sum_{f''=[2],[11]} \left(\alpha^{4j}\,[4^j]\,(f''^{\,c}f'')\;\|\;T(A-1,A)\;\|\;\alpha^{4j}\,[4^j]\,(f''^{\,c}f'')\right) a_{f''}\sqrt{|\widehat{f''^{\,c}}|}$$

Da $|\widehat{f''^{\,c}}| = |f''^{\,c}|$ und $T(A-1,A) \equiv T(2)$ folgt die Gleichung 4.(9.c).

B. ABLEITUNG DER GLEICHUNG 4.(107)

Da die Gauß Wechselwirkung 4.(66.a) nur bis zu den ersten Ordnungen bekannt sein muß, lassen sich die folgenden Ersetzungen vornehmen.

1.) Elimination der Quadrate im Exponent :

$$\tilde{T}_G(2)(\tilde{x}_1+\tilde{t}_{\tilde{n}_1}, \tilde{x}_2+\tilde{t}_{\tilde{n}_2}; x_1+t_{n_1}, x_2+t_{n_2})\;\exp(-\tilde{x}_1 t^*_{\tilde{n}_1} - \tilde{x}_2 t^*_{\tilde{n}_2} - x_1^* \tilde{t}_{n_1} - x_2^* \tilde{t}_{n_2}) \qquad (B.1)$$

$$\xrightarrow{(66.a)} Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2}\;\exp(\tilde{x}_1 b_1^* + \tilde{x}_2 b_2^* + x_1^* \tilde{b}_1 + x_2^* \tilde{b}_2)$$

$$\cdot \exp(\lambda_+ \tilde{x}_1 x_1^* + \lambda_+ \tilde{x}_2 x_2^* - \lambda_- \tilde{x}_1 x_2^* - \lambda_- \tilde{x}_2 x_1^* - 2q\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - 2q x_1^* x_2^*)$$

2.) Einführung der bra-ket-Schreibweise für die reproduzierenden Kerne und Entwicklung des zweiten Exponenten bis zu den ersten Ordnungen :

$$\longrightarrow Q_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2 n_1 n_2}\;(\tilde{x}_1|b_1)(\tilde{x}_2|b_2)(\tilde{b}_1|x_1)(\tilde{b}_2|x_2)\;\cdot \qquad (B.2)$$

$$\cdot \Big\{ 1 - \lambda_+(\bar{x}_1 \cdot x_1^* + \bar{x}_2 \cdot x_2^*) + \lambda_+^2 \, \bar{x}_1 \cdot x_1^* \, \bar{x}_2 \cdot x_2^*$$
$$- \lambda_-(\bar{x}_1 \cdot x_2^* + \bar{x}_2 \cdot x_1^*) + \lambda_-^2 \, \bar{x}_1 \cdot x_2^* \, \bar{x}_2 \cdot x_1^*$$
$$- 2q(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1^* \cdot x_2^*) + 4q^2 \, \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \, x_1^* \cdot x_2^* \Big\}$$

3.) Ausmultiplizieren bis zu den ersten Ordnungen liefert den Ausdruck 4.(107).

Bemerkung :

Das ist keine konsequente Entwicklung ; denn die reproduzierenden Kerne in 4.(107) ließen sich auch noch entwickeln. Es ist aber weitaus bequemer, mit der Form 4.(107) zu arbeiten.

REFERENZEN

1) J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. A245(1958)128, 562

2) D. S. Koltun, Phys. Rev. 124(1961)1162

3) D. M. Brink and G. F. Nash, Nucl. Phys. 40(1963)608

4) J. P. Elliott and M. Harvey, Proc. Roy. Soc. A272(1963)557

5) G. F. Nash, Nuovo Cimento 30(1963)1064, 32(1964)727

6) C. Adler, T. Corcoran and C. Mast, Nucl. Phys. 88(1966)145

7) M. K. Banerjee and C. A. Levinson, Phys. Rev. 130(1963)1036

8) M. K. Banerjee, C. A. Levinson and S. Meshkov, Phys. Rev. 130(1963)1064

9) M. Harvey, Nucl. Phys. 52(1964)542

10) M. Harvey in: Advances in Nuclear Physics, Vol. 1, ed. by M. Baranger and E. Vogt, Plenum Press, New York(1969)67

11) Y. Akiyama, A. Arima and T. Sebe, Nucl. Phys. A138(1969)273

12) K. T. Hecht, Annual Rev. Nucl. Science 23(1973)123

13) J. C. Parikh, Group Symmetries in Nuclear Structure, ed. by E. W. Vogt and J. W. Negele, Plenum Press, New York(1978)

14) R. Bader, Die Gruppe SU(3) und die Wechselwirkung zusammengesetzter Nukleonensysteme, Diplomarbeit, Universität Tübingen(1981)

15) P. Kramer, G. John and D. Schenzle, Group Theory and the Interaction of Composite Nucleon Systems, Vieweg, Braunschweig(1980)

16) D. Schenzle, Supermultipletts, Dreiclusterkonfigurationen und Struktur der Atomkerne A=4-10, Dissertation, Universität Tübingen(1974)

17) A. Herzenberg, Nucl. Phys. 3(1957)1

18) A. Herzenberg and A. S. Roberts, Nucl. Phys. 3(1957)314

19) E. Van der Spuy, Nucl. Phys. 11(1959)615

20) A. C. Butcher and J. M. McNamee, Proc. Phys. Soc. 74(1959)529

21) E. W. Schmid and K. Wildermuth, Nucl. Phys. 26(1961)463

22) I. Shimodaya, R. Tamagaki and H. Tanaka, Prog. Theor. Phys. 27(1962)793

23) S. Okai and S. C. Park, Phys. Rev. 145(1966)787

24) R. Tamagaki, Suppl. Prog. Theor. Phys. Extra Number(1968)242

25) H.H.Hackenbroich, T.H.Seligman, W.Zahn and D.Fick, Phys.Lett.62B (1976)121

26) H.Horiuchi, Prog.Theor.Phys.50(1973)529

27) H.Horiuchi, Prog.Theor.Phys.43(1970)375

28) B.Giraud and D.Zaikine, Phys.Lett.37B(1971)25

29) N.B. de Takacsy, Phys.Rev.C5(1972)1883

30) F.Tanabe, A.Tohsaki and R.Tamagaki, Prog.Theor.Phys.50(1973)1774

31) T.Yukawa, Phys.Rev.C8(1973)1593

32) A.Lumbroso, Phys.Rev.C10(1974)1271

33) H.Friedrich, H.Hüsken and A.Weiguny, Nucl.Phys.A220(1974)125

34) D.Baye and P.-H.Heenen, Nucl.Phys.A233(1974)304

35) R.Beck, J.Borysowicz, D.M.Brink and M.V.Mihailović, Nucl.Phys. A244(1975)45, 58

36) H.R.Fiebig and A.Weiguny, Z.Physik A279(1976)275

37) Y.Mito and M.Kamimura, Prog.Theor.Phys.56(1976)583

38) H.Friedrich and L.F.Canto, Nucl.Phys.A291(1977)249

39) L.F.Canto and D.M.Brink, Nucl.Phys.A279(1977)85

40) F.Tanabe and F.Nemoto, Prog.Theor.Phys.51(1974)2009

41) P.-H.Heenen, Nucl.Phys.A272(1976)399

42) K.Langanke, Quasimolekulare Zustände, Rückwärtsanomalie und Isotopen-Effekt in der Kern-Kern-Streuung — Eine mikroskopische Untersuchung dieser Phänomene in der elastischen α-Streuung an den Ca-Isotopen, in der elastischen ^{16}O-Streuung an ^{16}O, ^{28}Si und ^{40}Ca sowie in der ^{28}Si(^{16}O,α)^{40}Ca-Reaktion, Dissertation, Universität Münster 1980

43) T.Yukawa, Phys.Lett.38.B(1972)1

44) T.Yukawa, Nucl.Phys.A186(1972)127

45) D.Baye and G,Reidemeister, Nucl.Phys.A258(1976)157

46) D.Baye and P.-H.Heenen, Nucl.Phys.A276(1977)354

47) L.F.Canto, Nucl.Phys.A279(1977)97

48) T.Ando, K.Ikeda and A.Tohsaki-Suzuki, Prog.Theor.Phys.59(1978)306

49) D.Baye and Y.Salmon, Nucl.Phys.A331(1979)254

50) D.Baye and Y.Salmon, Nucl.Phys.A323(1979)521

51) T.Ando, K.Ikeda and Y.Suzuki, Prog.Theor. Phys.54(1975)119

52) W. Sünkel and K. Wildermuth, Phys. Lett. 41B(1972)439
53) M. Kamimura and T. Matsuse, Prog. Theor. Phys. 51(1974)438
54) T. Matsuse, M. Kamimura and Y. Fukushima, Prog. Theor. Phys. 53(1975) 706
55) M. LeMere, Y. C. Tang and D. R. Thompson, Phys. Rev. C14(1976)23
56) H. Friedrich and K. Langanke, Nucl. Phys. A252(1975)47
57) W. Sünkel, Phys. Lett. 65B(1976)419
58) H. Friedrich, Nucl. Phys. A224(1974)537, A239(1975)531
59) A. Tohsaki, F. Tanabe and R. Tamagaki, Prog. Theor. Phys. 53(1975)1022
60) T. Ando, K. Ikeda and A. Tohsaki-Suzuki, Prog. Theor. Phys. 61(1979)101
61) H. Friedrich, K. Langanke and A. Weiguny, Phys. Lett. 63B(1976)125
62) S. Saito, Prog. Theor. Phys. 41(1969)705
63) T. Matsuse and M. Kamimura, Prog. Theor. Phys. 49(1973)1765
64) H. Friedrich, Phys. Rep. 74(1981)209
65) J. A. Wheeler, Phys. Rev. 52(1937)1083, 1107
66) S. Edwards, Proc. Cam. Phil. Soc. 48(1952)652
67) K. Wildermuth and Th. Kanellopoulos, Nucl. Phys. 7(1958)150
68) S. Matthies, V. G. Neudachin and Yu. F. Smirnov, Nucl. Phys. 49(1963)97
69) H. Margenau, Phys. Rev. 59(1941)37
70) S. J. Biel, Proc. Phys. Soc. A70(1957)866
71) D. M. Brink in : Proceedings of the International School of Enrico Fermi, Course XXXVI, ed. by C. Bloch, Academic Press, New York(1966)
72) D. L. Hill and J. A. Wheeler, Phys. Rev. 89(1953)1102
73) J. J. Griffin and J. A. Wheeler, Phys. Rev. 108(1957)311
74) F. Tabakin, Nucl. Phys. A182(1972)497
75) B. Giraud, J. C. Hocquenghem and A. Lumbroso, Phys. Rev. C7(1973)2274
76) D. M. Brink and A. Weiguny, Nucl. Phys. A120(1968)59
77) P. Ring and P. Schuck, The Nuclear Many-Body Problem, Springer, New York(1980)
78) D. A. Bromley, J. A. Kuehner and E. Almqvist, Phys. Rev. Lett. 4(1960)365
79) E. Almqvist, D. A. Bromley and J. A. Kuehner, Phys. Rev. Lett. 4(1960)515
80) E. Vogt and H. McManus, Phys. Rev. Lett. 4(1960)518
81) R. H. Davis, Phys. Rev. Lett. 4(1960)521

82) N. Cindro, The Resonant Behaviour of Heavy-Ion Systems, Riv. Nuovo Cimento 4, No. 6(1981)

83) W. Scheid, R. Ligensa and W. Greiner, Phys. Rev. Lett. 21(1968)1479

84) P. Holzer, U. Mosel and W. Greiner, Nucl. Phys. A138(1969)241

85) B. Imanishi, Phys. Lett. 27B(1968)267

86) B. Imanishi, Nucl. Phys. A125(1969)33

87) W. Scheid, W. Greiner and R. Lemmer, Phys. Rev. Lett. 25(1970)176

88) H.-J. Fink, W. Scheid and W. Greiner, Nucl. Phys. A188(1972)259

89) T. Matsuse, Y. Abe and Y. Kondō, Prog. Theor. Phys. 59(1978)1904

90) T. Matsuse, Y. Kondō and Y. Abe, Prog. Theor. Phys. 59(1978)1009

91) Y. Kondō, Y. Abe and T. Matsuse, Phys. Rev. C19(1979)1356

92) Y. Kondō, D. A. Bromley and Y. Abe, Phys. Rev. C22(1980)1068

93) K. Katō, S. Okabe and Y. Abe, Prog. Theor. Phys. 68(1982)1794

94) F. Iachello, Phys. Rev. C23(1981)2778

95) K. A. Erb and D. A. Bromley, Phys. Rev. C23(1981)2781

96) J. Cseh, Phys. Rev. C27(1983)2991

97) J. Cseh, Application of the Algebraic Model to Quasimolecular Resonances, Preprint

98) G. Gaul, W. Bickel, W. Lahmer and R. Santo in: Resonances in Heavy Ion Reactions, Lect. Notes Phys. 156, ed. by K. A. Eberhard, Springer, Berlin(1982)

99) R. H. Siemssen, J. V. Maher, A. Weidinger and D. A. Bromley, Phys. Rev. Lett. 19(1967)369

100) J. V. Maher, M. W. Sachs, R. H. Siemssen, A. Weidinger and D. A. Bromley, Phys. Rev. 188(1969)1665

101) M. L. Halbert, C. B. Fulmer, S. Raman, M. J. Saltmarsh, A. H. Snell and P. H. Stelson, Phys. Lett. 51B(1974)341

102) P. Kramer and M. Moshinski, Group Theory of Harmonic Oscillators and Nuclear Structure, in: Group Theory and its Applications, Vol. 1, ed. by E. M. Loebl, Academic Press, New York(1968)

103) M. Moshinsky, J. Math. Phys. 4(1963)1128

104) M. Hamermesh, Group Theory and its Application to Physical Problems Addison-Wesley Publishing Company(1964)

105) G. de B. Robinson, Representation Theory of the Symmetric Group, University of Toronto Press(1961)

106) K. Wildermuth and Y. C. Tang, A Unified Theory of the Nucleus, Vol. 1, Vieweg, Braunschweig(1977)

107) D. M. Brink and E. Boeker, Nucl. Phys. A91(1967)1

108) A. B. Volkov, Nucl. Phys. 74(1965)33

109) A. Ruckelshausen, W. Kühn, R. D. Fischer, V. Metag, R. Mühlhans, R. Novotny, H. Stroher, H. W. Heyng, D. Habs, R. Repnow, C. Ender, H. Groeger, R. Kroth, D. Schwalm, S. Hlavac, R. S. Simon, R. V. F. Janssens, T. L. Khoo, B. Haas, F. Haas, D. Freeman in : Verhandlungen der DPG 3(1985)519

110) T. Lauritsen and F. Ajzenberg-Selove, Nucl. Phys. A78(1966)1

111) F. Ajzenberg-Selove and T. Lauritsen, Nucl. Phys. A227(1974)1

112) F. Ajzenberg-Selove, Nucl. Phys. A320(1979)1

113) R. W. Shaw, Jr., J. C. Norman, R. Vandenbosch and C. J. Bishop, Phys. Rev. 184(1969)1040

114) I. Tserruya, Y. Eisen, D. Pelte, A. Gavron, H. Oeschler, D. Berndt and H. L. Harney, Phys. Rev. C18(1978)1688

115) J. J. Kolata, R. C. Fuller, R. M. Freeman, F. Haas, B. Heusch and A. Gallmann, Phys. Rev. C16(1977)891

116) F. Haas, C. Beck, R. M. Freeman, B. Heusch, A. Gallmann, J. J. Kolata and S. M. Lee, Resonances entre ions lourds "legères": resultats recents par la méthode gamma, Centre de Recherches Nucléaires et Université Louis Pasteur, 67037 Strassbourg Cedex, France

117) P. P. Singh, D. A. Sink, P. Schwandt, R. E. Malmin and R. H. Siemssen, Phys. Rev. Lett. 28(1972)1714

118) V. Bargmann, Group representations in Hilbert spaces of analytic functions, in : Analytic methods in mathematical physics, ed. by R. P. Gilbert and R. G. Newton, New York(1968)

119) M. Brunet and P. Kramer, Rep. Math. Phys. 17(1980)205

120) H. Horiuchi and Y. Suzuki, Prog. Theor. Phys. 49(1973)1974

121) H. Horiuchi, Prog. Theor. Phys. 51(1974)745

122) Y. Fujiwara and H. Horiuchi, Prog. Theor. Phys. 63(1980)895

123) Y. Fujiwara and H. Horiuchi, Prog. Theor. Phys. 65(1981)1632, 1901

124) Y. Fujiwara, Y. C. Tang and H. Horiuchi, Prog. Theor. Phys. 70(1983)809

125) K. T. Hecht and W. Zahn, Nucl. Phys. A313(1979)77

126) K. T. Hecht, E. J. Reske, T. H. Seligman and W. Zahn, Nucl. Phys. A356 (1981)146

127) J.-R. Derome, J. Math. Phys. 7(1966)612

128) J.-R. Derome and W. T. Sharp, J. Math. Phys. 6(1964)1584

129) A. R. Edmonds, Drehimpulse in der Quantenmechanik, BI 53/53a, 2. Auflage, Mannheim (1964)

130) Y. Fujiwara and H. Horiuchi, RIFP-393 (1980)

131) K. T. Hecht, Nucl. Phys. 62(1965)1

132) K. T. Hecht, Nucl. Phys. A283(1977)223

133) K. T. Hecht and D. Braunschweig, Nucl. Phys. A244(1975)365

134) K. T. Hecht, Nucl. Phys. A170(1971)34

135) J. J. de Swart, Il Nuovo Cim. XXXI, No. 2(1964)420

136) M. Resnikoff, J. Math. Phys. 8(1967)63

137) R. T. Sharp and H. von Baeyer, J. Math. Phys. 7(1966)1105

138) M. Moshinsky, Rev. Mod. Phys. 34(1962)813

139) E. Chacón, M. Ciftan and L. C. Biedenharn, J. Math. Phys. 13(1972)577

140) J. P. Draayer and Y. Akiyama, J. Math. Phys. 14(1973)1904

141) Y. Akiyama and J. P. Draayer, Comp. Phys. Commun. 5(1973)405

142) M. Resnikoff, J. Math. Phys. 8(1967)79

143) M. Moshinsky and E. Chacón, Racah Coefficients and States with Permutational Symmetry, Preprint (1967), (submitted for publication in Racah's Memorial Volume)

144) P. Kramer, Nucl. Phys. 82(1966)241

145) F. Haas, A. Hachem, C. Beck and R. M. Freeman, in : Contributed Papers of the 4th International Conference on Clustering Aspects of Nuclear Structure and Nuclear Reactions, Chester(1984)137

146) J. P. Elliott, J. Hope and H. A. Jahn, London Roy. Soc. Phil. Trans. A246 (1953)241

Lebenslauf

1.5.1954	Geburt in Friedrichshafen
	Eltern : Hermann Bader (Verwaltungsdirektor a.D.)
	Edeltraud Bader (geb. Ahninger)
1961 - 1965	Besuch der Grundschule in Friedrichshafen
1965	Aufnahme in das Graf-Zeppelin-Gymnasium in Friedrichshafen
1974	Reifeprüfung
Okt. 1974	Immatrikulation in den Studiengang Physik/Diplom an der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
März 1977	Vordiplomprüfung
Dez. 1978	Beginn der Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik
Okt. 1979	Einschreibung in den Magisterstudiengang :
	Urgeschichte (HF),
	Vor-und Früh-Geschichte (NF),
	Physik/Magister (NF) ;
WS 1979/80 -	Anfertigung der Diplomarbeit mit dem Thema
Jan. 1981	"Die Gruppe SU(3) und die Wechselwirkung zusammengesetzter Nukleonensysteme"
	unter Anleitung von Prof. Dr. P. Kramer
Juli 1981	Erlangung des Grades eines Diplom-Physikers
Juli 1981 -	Doktorand im Institut für Theoretische Physik bei Prof. Dr. P. Kramer und Abfassung der Inaugural-Dissertation mit dem Thema
	"Das U(3)-Prinzip als Basis eines mikroskopischen U(3)-Modells zur Erklärung des Phänomens nuklearer Moleküle
	Entwicklung eines analytischen Konzepts zur Beschreibung von Kern-Kern-Kollisionen im Rahmen der Composite Particle Theorie im Bargmann Raum"

Publikationen :

R. Bader and P. Kramer, Physica 114 A (1982) 306
"The Unitary Group U(3) in Nuclear Composite Particle Reactions"

R. Bader and P. Kramer, in Contributed Papers of the 4th International Conference on Clustering Aspects of Nuclear Structure and Nuclear Reactions (1984) 135
"The U(3) Principle causes Nuclear Molecular Resonances :
the Example of the Elastic Scattering $^{16}O + ^{16}O$ "

R. Bader and P. Kramer, to be published in Nucl. Phys. A (1985)
"The U(3) Principle causes Nuclear Molecular Resonances"

Vorträge :

Canterbury 1981
Tenth International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics
" The Unitary Group U(3) in Nuclear Composite Particle Reactions "

Chester 1984
Fourth International Conference on Clustering Aspects of Nuclear Structure and Nuclear Reactions
" The U(3)-Principle causes Nuclear Molecular Resonances :
the Example of the Elastic Scattering $^{16}O + ^{16}O$ "

München 1985
Deutsche Physikalische Gesellschaft
49. Physikertagung gemeinsam mit der Frühjahrstagung München 1985
" Das U(3)-Prinzip führt zu quasi-molekularen Resonanzen "

Akademische Lehrer :

M. Baumann, W. Becker, G. Dähn, W. Dittrich, G. Elwert, A. Fäßler, F. Fischer, H. Fischer, E. Gersbach, F. Gönnenwein, J. Hahn, R. Hübener, W. Klink, P. Kramer, H. Krüger, F. Lenz, G. Mack, G. Mansfeld, D. Markert, G. Mertens, G. Möllenstedt, H. J. Müller-Beck, A. Rieckers, R. Rottländer, E. Schmid, G. Schubring, A. Schwenk, R. Speidel, J. Strähle, H. Stumpf, K. Wildermuth, H. Wittern, H. Ziegelmann ;

Druck und Verarbeitung: Dissertations Druck Darmstadt, Tel. 06151/21353